Генерические теории как метод апроксимации элементарных теорий.

В.Н. Ремесленников

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

29 апреля, 2015г.

Пусть $S = \{M_i, i \in I\}$ – бесконечное множество алгебраических систем сигнатуры L, и μ – вероятностная мера над I (μ – конечно-аддитивна и $\mu(I) = 1$);

B – булева алгебра μ-измеримых подмножеств из I;

Φ_L – множество предложений сигнатуры L;

$T = \mathrm{Th}(S)$ – элементарная теория множества систем S.

Определение

Генерической теорией множества систем S относительно меры μ называется множество $\mathrm{GTh}(S,\mu)$ всех таких предложений $\varphi \in \Phi_L$, что подмножество

$$I_\varphi = \{i \in I \mid M_i \models \varphi\}$$

измеримо, и $\mu(I_\varphi) = 1$.

Предложение

Для любого множества систем S и меры μ теория $\mathrm{GTh}(S,\mu)$ непротиворечива и $\mathrm{GTh}(S,\mu) \supseteq \mathrm{Th}(S)$.

Пусть F — неглавный фильтр над I. Определяем μ_F следующим образом: пусть $P \subset I$, тогда

$$\mu_F(P) = \begin{cases} 1, & \textit{если } P \in F; \\ 0, & \textit{если } \overline{P} \in F; \\ \textit{не определено в других случаях.} \end{cases}$$

Понятно, что μ_F является вероятностной мерой.

Примеры фильтров

1. Фильтр Фреше на множестве I состоящий из всех ко-конечных подмножеств I.
2. Фильтр генерических множеств, определяемый следующим образом. Предположим что множество алгебраических систем S есть счетное объединение непересекающихся конечных множеств $S = \cup S_i$ (т.е. задана стратификация S). Подмножество A из S назовем генерическим, если его асимптотическая плотность $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|A \cap S_n|}{|S_n|}$ существует и равна 1. Нетрудно понять что множество всех генерических подмножеств S образует фильтр, называемый фильтром генерических множеств.

Определение

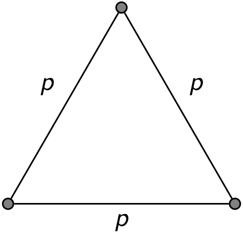
Модели теории $\mathrm{GTh}(S,\mu)$ будем называть **псевдо-S-системами**. Если множество S состоит из конечных систем, то модели $\mathrm{GTh}(S,\mu)$ будем называть **псевдоконечными S-системами**.

Определение

Если теория $\mathrm{GTh}(S,\mu)$ является полной, то говорят, что **для $\mathbf{Th}(S)$ выполнен $(0-1)$-закон относительно меры μ**.

1. Вынуждение
2. Аппроксимация
3. Полезность

Положим S - это множество конечных (простых) графов и S_n - множество графов из S с n вершинами. Мера μ_n на S_n определяется схемой Реньи-Эрдёша.



где $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$.

Генерическую теорию для конечных графов построим методом 1-расширения. Если задан граф G с n вершинами, и нам нужно расширить его до графа с $n+1$ вершиной, то это делается следующим образом. Выбирается множество вершин $S \subseteq V(G)$, и новая вершина v соединяется со всеми вершинами из множества S.

Формализуем последние рассуждения с помощью формулы.
Пусть $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

$$\psi_{n,m} : \forall x_i \, \forall y_j \, \exists z \, \left(\bigwedge_{i,j} x_i \neq y_j \right) \to \left(\bigwedge_i E(x_i, z) \wedge \bigwedge_j \neg E(y_i, z) \right)$$

Доказывается, что эти формулы принадлежат генерической теории конечных графов.

Генерическая теория конечных графов полна, ω-категорична и определяется аксиомами:

1. аксиомы теории простых графов;
2. $\left\{\psi_{n,m} \,|\, (n, m) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

Пусть S есть множество всех конечных частично упорядоченных множеств, и S_n - подмножество S состоящее из всех множеств из n элементов.
Мера μ в этом пункте определяется генерическим фильтром над множеством S относительно стратификации $S = \cup S_n$.
Приведём результаты, полученные в статье [4]. Основой этих результатов служит следующее утверждение принадлежащее генерической теории: в конечном частично упорядоченном множестве не существует цепи, длина которой ≥ 3 [3].
Отсюда следует, что в любой псевдо частично упорядоченной модели A диаграмма Хассе состоит из трёх уровней $A = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2$, где A_0 — атомы модели A.

Отметим, что отношение $x \in A_i$ выразимо формулой логики первого порядка.

1. Для любых $j, k, l \geq 0$ существует аксиома, обозначающая, что для любых различных $x_0, \ldots, x_{j-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}$ из A_1 и для всех различных $z_0, \ldots, z_{l-1} \in A_0$ существует $z \in A_0$ не равное $z_0, \ldots, z_{l-1}$ такое что

$$\bigwedge_{i<j} z \leq x_i \wedge \bigwedge_{i<k} z \not\leq y_i.$$

2. Для любых $j, k, l \geq 0$ существует аксиома, что для любых различных $x_0, \ldots, x_{j-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}$ из A_1 и любых различных $z_0, \ldots, z_{l-1} \in A_2$ существует $z \in A_2$ не равное $z_0, \ldots, z_{l-1}$ такое что

$$\bigwedge_{i<j} z \geq x_i \wedge \bigwedge_{i<k} z \not\geq y_i.$$

3. Для любых $j, j', k, k', l \geq 0$ существует аксиома, говорящая что для любых различных $x_0, \dots, x_{j-1}$ и $y_0, \dots, y_{k-1}$ из A_0, все различные $x'_0, \dots, x'_{j-1}$ и $y'_0, \dots, y'_{k-1}$ из A_2, и всех различных $z_0, \dots, z_{l-1} \in A_1$ существует $z \in A_1$ не равное $z_0, \dots, z_{l-1}$ такое что

$$\bigwedge_{i<j} x_i \leq z \wedge \bigwedge_{i<k} y_i \not\leq z \wedge \bigwedge_{i<j'} z \leq x'_i \wedge \bigwedge_{i<k'} z \not\leq y'_i.$$

Аксиомы генерической теории

- аксиомы категории частичных порядков;
- аксиомы о цепях выше;
- три последовательности аксиом расширения.

Теорема

Пусть $GTh(S, \mu_F)$ — генерическая теория серии S конечных частично упорядоченных множеств по отношению к ассимптотическому фильтру F. Тогда:

(i). $GTh(S, \mu_F)$ является полной.

(ii). множество аксиом выше является множеством аксиом для $GTh(S, \mu_F)$

Определение

Пусть $T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_i, i \in I\}$. Оператор $T \to \mathrm{GTh}(\mathcal{K}, \mu)$ на теориях есть генерический компаньон-оператор, если

1. $T_\forall = \mathrm{GTh}_\forall(\mathcal{K}, \mu)$;
2. мера $\mu = \mu_F$, где F— неглавный фильтр над множеством I.

Определение

Если теория $\mathrm{GTh}(\mathcal{K}, \mu)$, есть генерический компаньон-оператор, то будем говорить, что теория $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ компаньон-аппрокисмируется теорией $\mathrm{GTh}(\mathcal{K}, \mu)$.

Проверим свойство аппроксимируемости на примерах теорий.
Компаньон-аппроксимируемость есть для теорий:

1. серии конечных булевых алгебр;
2. серии конечных графов;
3. серии конечных полей;
4. серии конечных циклических групп.

1. Существуют ли «хорошие» генерические компаньон-операторы для элементарных теорий:
   (a) конечных частичных упорядоченных множеств;
   (b) конечных дистрибутивных решёток;
2. Выполнить исследования по генерической теории относительно меры, определённой фильтром Фреше, для конечных колец вычетов.
3. Пусть $F_p(n)$ — свободная про-p-группа и $F_{p,c}(n) = \frac{F_p(n)}{\gamma_{c+1}(F_p(n))}$. Описать генерическую теорию множества групп $\{F_{p,c}(n),\ c \in \mathbb{N}\}$ относительно меры, определённой фильтром Фреше над $\mathbb{N}$.

- А.Н. Рыбалов Генерические алгоритмы (статьи и доклады)
- Vijay Vazirani Approximation Algorithms, 2001, Springer, ≈ 1000 p.p.

Экзистенциально замкнутые структуры для групп были введены В. Скоттом в 1951 г. и приобрели большую популярность в работах специалистов по алгебре и теории моделей в 60–70 годы XX столетия (см. обзор: Angus Macintyre, Model Completeness, 1977).

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — универсальный класс $\mathcal{L}$-структур. Будем говорить, что структура M из $\mathcal{K}$ *экзистенциально замкнута* ($M \in \mathcal{K}^{ec}$), если для любой конечной системы S — равенств и неравенств (атомарных формул и их отрицаний), совместной с теорией $\mathcal{K}$, из разрешимости системы S в некотором расширении $M' \in \mathcal{K}$ системы M следует разрешимость S уже в системе M.

1) Поле комплексных чисел в теории полей.

2) Граф Радо в теории простых графов.

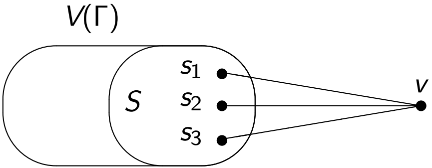
3) Группа Q^+ в теории абелевых групп без кручения.

Метод 1-расширения. Систему M расширяем с помощью 1-го элемента.

Примеры 1-расширений.

Пусть Γ — конечный простой граф; $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество ребер.

Переход от Γ к Γ_1:
$V(\Gamma_1) = V(\Gamma) \cup \{v\}$;
$E(\Gamma_1) = E(\Gamma) \cup \{(v, s) \mid S \subseteq V(\Gamma),\ s \in S\}$.



Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — универсальный класс $\mathcal{L}$-структур, $\mathcal{K}$ обладает свойствами *JEP* и *AP*, и каждая конечно порожденная структура в $\mathcal{K}$ имеет абсолютное представление. Тогда $A \times Th(\mathcal{K})$ вместе с аксиомами

(1) $\mathcal{K}^{ec} \models \forall \overline{x}\ \exists \overline{y}\ [\Phi_c(\overline{x}) \to \theta_\Phi(\overline{x}, \overline{y})]$

(2) $\mathcal{K}^{ec} \models \exists \overline{y}\ \Phi(\overline{y})$

аксиоматизируют $\mathcal{K}^{ec}$. Следовательно, $\mathcal{K}^{ec}$ есть модельное пополнение $\mathcal{K}$.

Следствие

Если $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям теоремы, то либо $\mathcal{K}^{ec}$ — $\aleph_0$-категоричен, либо не имеет бесконечных моделей.

Theorem

The poset axioms along with $1 \leq \phi \leq 2$ and $2\phi_1^1$ axiomatize $Posets^{ec}$. Thus $Posets^{ec}$ is finitely axiomatizable.

Corollary

Suppose $A \in Posets$. Then we have $A \in Posets^{ec}$ iff any 1-extension of any $P \subseteq A$ with $|P| \leq 5$ can be realized in A.

- J. Ax *Elementary theory of finite fields*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 88, No. 2 (1968), pp. 239-271.
- Robert H. Gilman, Yuri Gurevich and Alexei Miasnikov *A Geometric Zero-One Law*, J. Symbolic Logic, Volume 74, Issue 3 (2009), p. 929-938.
- Kleitman D.J., Rothschild B.L. *Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set*, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), p. 205-220.
- Kevin J. Compton. *The computational complexity of asymptotic problems I: Partial orders*. Information and Computation 78(2): 108-123 (1988).

- Lavrov, I. A. The effective non-separability of the set of identically true formulae and the set of finitely refutable formulae for certain elementary theories. Algebra i Logika Sem. 2 1963 no. 1, 5-18.
- А.А. Мищенко, В.Н. Ремесленников, А.В. Трейер *Генерические теории серий конечных абелевых групп*. представлена в журнал Алгебра и логика.
- Angus Macintyre. *Model completeness*, Handbook of mathematical logic, ed. K.J. Barwise, pp. 80-139, Amsterdam: North-Holland [379], (1977).
- А.А. Мищенко, В.Н. Ремесленников, А.В. Трейер *Классификация универсальных теорий абелевых групп*.