Универсальные инварианты для классов абелевых групп

Мищенко А.А.

ОФ ИМ СО РАН

29 апреля, 2015г.

Доклад основан на результатах совместной статьи:
А.А. Мищенко, В.Н. Ремесленников, А.В. Трейер. *Универсальные инварианты для классов абелевых групп*.

Универсальная эквивалентность

Универсальным предложением называется формула вида

$$\forall w_1 \ldots \forall w_m \phi(w_1, \ldots, w_m),$$

где $\phi(w_1, \ldots, w_m)$ — формула языка L, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных.

Множество всех универсальных предложений, истинных на группе G, называется ее **универсальной теорией** $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

Две группы называются **универсально эквивалентными**, если их универсальные теории совпадают. Если группы G и H универсально эквиваленты, то будем писать $G \equiv_\forall H$.

Аналогично определяется **экзистенциальная теория** группы, а также **экзистенциальная эквивалентность** групп. Если группы G и H экзистенциально эквиваленты, то пишут $G \equiv_\exists H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

Универсальная эквивалентность

Универсальным предложением называется формула вида

$$\forall w_1 \dots \forall w_m \phi(w_1, \dots, w_m),$$

где $\phi(w_1, \dots, w_m)$ — формула языка L, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных.

Множество всех универсальных предложений, истинных на группе G, называется ее **универсальной теорией** $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

Две группы называются **универсально эквивалентными**, если их универсальные теории совпадают. Если группы G и H универсально эквиваленты, то будем писать $G \equiv_\forall H$.

Аналогично определяется **экзистенциальная теория** группы, а также **экзистенциальная эквивалентность** групп. Если группы G и H экзистенциально эквиваленты, то пишут $G \equiv_\exists H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

Универсальная эквивалентность

Универсальным предложением называется формула вида

$$\forall w_1 \dots \forall w_m \phi(w_1, \dots, w_m),$$

где $\phi(w_1, \dots, w_m)$ — формула языка L, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных.

Множество всех универсальных предложений, истинных на группе G, называется ее **универсальной теорией** $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

Две группы называются **универсально эквивалентными**, если их универсальные теории совпадают. Если группы G и H универсально эквивалентны, то будем писать $G \equiv_\forall H$.

Аналогично определяется **экзистенциальная теория** группы, а также **экзистенциальная эквивалентность** групп. Если группы G и H экзистенциально эквивалентны, то пишут $G \equiv_\exists H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

Универсальная эквивалентность

Универсальным предложением называется формула вида

$$\forall w_1 \ldots \forall w_m \phi(w_1, \ldots, w_m),$$

где $\phi(w_1, \ldots, w_m)$ — формула языка L, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных.

Множество всех универсальных предложений, истинных на группе G, называется ее **универсальной теорией** $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

Две группы называются **универсально эквивалентными**, если их универсальные теории совпадают. Если группы G и H универсально эквиваленты, то будем писать $G \equiv_\forall H$.

Аналогично определяется **экзистенциальная теория** группы, а также **экзистенциальная эквивалентность** групп. Если группы G и H экзистенциально эквиваленты, то пишут $G \equiv_\exists H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

Универсальная эквивалентность

Универсальным предложением называется формула вида

$$\forall w_1 \ldots \forall w_m \phi(w_1, \ldots, w_m),$$

где $\phi(w_1, \ldots, w_m)$ — формула языка L, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных.

Множество всех универсальных предложений, истинных на группе G, называется ее **универсальной теорией** $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

Две группы называются **универсально эквивалентными**, если их универсальные теории совпадают. Если группы G и H универсально эквиваленты, то будем писать $G \equiv_\forall H$.

Аналогично определяется **экзистенциальная теория** группы, а также **экзистенциальная эквивалентность** групп. Если группы G и H экзистенциально эквиваленты, то пишут $G \equiv_\exists H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

Элементарная эквивалентность

Szmielew W. *Elementary properties of Abelian groups.* — Fundamenta Mathematica. — 1955. — v. 41. — p. 203–271.

Введены элементарные инварианты для абелевых групп - δ, $\alpha_{p,k}$, $\beta_{p,k}$, $\gamma_{p,k}$.

Теорема (Szmielew)

Абелевы группы A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда значения элементарных инвариантов группы A совпадают со значениями элементарных инвариантов для группы B.

Цель данной работы

Мы заменяем элементарную теорию $\mathrm{Th}(A)$ для абелевой группы A на универсальную теорию этой группы $\mathrm{Th}_{\forall}(A)$ и вводим универсальный инвариант $\mathrm{UI}(A)$ для группы A как последовательность

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_n}(A), \ldots),$$

где $\mathrm{UI}_{p_n}(A)$ – вектор составленный из значений элементарных инвариантов, а p_n – простое число, и доказываем аналог теоремы Шмелевой об универсальной эквивалентности для абелевых групп и для универсальных классов абелевых групп.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Пусть L – групповой язык, $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ – множество букв.

Атомарной формулой называется равенство или неравенство термов от переменных из множества X. Конечное множество атомарных формул S будем называть **конечной диаграммой**.

Будем говорить, что конечная диаграмма S **реализуется** в модели M, если существуют элементы $m_1, \ldots, m_n \in M$ на которых выполняются все атомарные формулы из S.

Это означает, что $M \models \varphi_s$

$$\varphi_s = \exists x_1, \ldots, \exists x_n \bigwedge_{\varphi \in S} \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество всех конечных диаграмм с точностью до изоморфизма, которые реализуются в моделе M обозначим $FD(M)$.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Отрицание $\neg\varphi_s$ формулы φ_s является универсальной формулой.

$$\neg\varphi_s = \forall x_1, \dots, \forall x_n \bigvee_{\varphi \in S} \neg\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Если универсальная формула $\neg\varphi_s$ выполнена на моделе M, то в ней нет набора из n элементов, удовлетворяющих формуле φ_s. Другими словами все универсальные формулы, которые выполнены на моделе M задают набор конечных диаграмм, которые не реализуются в модели M, назовем такие диаграммы **запрещенными в моделе M**.

Множество всех запрещенных конечных диаграмм с точностью до изоморфизма обозначим $Forb(M)$.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Лемма

Пусть A и B – две группы. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Группы A и B универсально эквивалентны;
2. $FD(A) = FD(B)$;
3. $Forb(A) = Forb(B)$.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс абелевых групп.

Обозначим через $FD(\mathcal{K})$ множество всех конечных диаграмм с точностью до изоморфизма, каждая из которых реализуется в некоторой модели M из класса $\mathcal{K}$.

Через $Forb(\mathcal{K})$ обозначим множество всех запрещенных конечных диаграмм во всех моделях M класса $\mathcal{K}$. Ясно, что множество формул из $Forb(\mathcal{K})$ есть универсальная теория класса $\mathcal{K}$.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Определение

Класс $\mathcal{K}_1$ **локально дискриминируется классом** $\mathcal{K}_2$, если для любой системы A из $\mathcal{K}_1$ и любой конечной диаграммы $S \in FD(A)$ существует система $B \in \mathcal{K}_2$ и гомоморфизм $\varphi : A \to B$ такие, что если конечная диаграмма S реализуется на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$, то эта конечная диаграмма реализуется в системе B на элементах $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Теорема (Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова)

Пусть A – нетерова по уравнениям алгебра языка L. Тогда для конечно порожденной алгебры B языка L следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Th}_\forall(A) \subseteq \mathrm{Th}_\forall(B)$;
2. B дискриминируется A;

Группа A **нетерова по уравнениям** тогда и только тогда, когда для любой бесконечной системы уравнений S от конечного числа неизвестных, существует её конечная подсистема S_0 такая что, множество решений системы S совпадает с множеством решений системы S_0.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Теорема (Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова)

Пусть A – нетерова по уравнениям алгебра языка L. Тогда для конечно порожденной алгебры B языка L следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Th}_\forall(A) \subseteq \mathrm{Th}_\forall(B)$;
2. B дискриминируется A;

Группа A **нетерова по уравнениям** тогда и только тогда, когда для любой бесконечной системы уравнений S от конечного числа неизвестных, существует её конечная подсистема S_0 такая что, множество решений системы S совпадает с множеством решений системы S_0.

Связь между универсальной эквивалентностью и дискриминируемостью

Теорема

Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ – два класса абелевых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_2)$;
2. Класс $\mathcal{K}_2$ локально дискриминируется классом $\mathcal{K}_1$.

Элементарные инварианты абелевых групп

Пусть A – абелева группа, p – простое число,

$A[p]$ – подгруппа в A, состоящая из всех элементов A порядка p или 1,

nA – подгруппа в A, состоящая из всех элементов вида na, где $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что p-слои и фактор группы $p^{k-1}A \big/ p^k A$ и $(p^{k-1}A)[p] \big/ (p^k A)[p]$ являются группами периода p, поэтому их можно рассматривать как векторное пространство над полем из p элементов, и можно говорить о размерности данного векторного пространства.

Элементарные инварианты абелевых групп

$$\alpha_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\left(p^{k-1}A \middle/ p^k A\right), & \text{если эта размерность конечная;} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\beta_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\left((p^{k-1}A)[p] \middle/ (p^k A)[p]\right), & \text{если эта размерность конечн} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\gamma_{p,k}(A) = \begin{cases} \dim\left((p^{k-1}A)[p]\right), & \text{если эта размерность конечная;} \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & \text{если группа } A \text{ ограничена;} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Элементарные инварианты абелевых групп

Свойства

Теорема (Szmielew)

Абелевы группы A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда значения элементарных инвариантов группы A совпадают со значениями элементарных инвариантов для группы B.

Теорема

Пусть A и B – абелевы группы. Тогда

$$\alpha_{p,k}(A \oplus B) = \alpha_{p,k}(A) + \alpha_{p,k}(B);$$

$$\beta_{p,k}(A \oplus B) = \beta_{p,k}(A) + \beta_{p,k}(B);$$

$$\gamma_{p,k}(A \oplus B) = \gamma_{p,k}(A) + \gamma_{p,k}(B);$$

$$\delta(A \oplus B) = \max(\delta(A), \delta(B)).$$

Универсальные инварианты для абелевых групп

Лемма

Пусть A – абелева группа, $\alpha_{p,k}, \beta_{p,k}, \gamma_{p,k}$ – элементарные инварианты. Тогда:

1. Существует такая универсальная формула $\theta_{p,k,m}$ языка L, где p – простое, $k, m \in \mathbb{N}$, что
$$A \models \theta_{p,k,m} \Leftrightarrow \gamma_{p,k}(A) \leq m;$$
2. Условия $\alpha_{p,k}(A) = m$ и $\beta_{p,k}(A) = m$, где $m \in \mathbb{N}$ не определяются универсальными формулами;
3. Неравенства $\alpha_{p,k}(A) \leq m$ и $\beta_{p,k}(A) \leq m$, где $m \in \mathbb{N}$ не определяются универсальными формулами.

Универсальные инварианты для абелевых групп

$$\mathfrak{A}_0 = \{A| \text{ если } A \text{ – группа без кручения, либо } A = \{0\}\},$$
$$\mathfrak{A}_p = \{A| \; T(A) = T_p(A) \neq 0\}, \; p \neq 0.$$

Пусть A – абелева группа.

Если $p \neq 0$, то **инвариантом** $\mathrm{UI}_p(A)$ для группы $A \in \mathfrak{A}_p$ обозначим следующий вектор:

$$\mathrm{UI}_p(A) = (\delta(A), \gamma_{p,1}(A), \gamma_{p,2}(A), \gamma_{p,3}(A), \ldots),$$

где $\delta(A) \in \{0, 1\}$, $\gamma_{p,k}(A)$ – элементарный инвариант $\gamma_{p,k}$ для группы A.

Если $p = 0$, то A – абелева группа без кручения либо $A = \{0\}$. Тогда **инвариант** $\mathrm{UI}_0(A) = \delta(A)$.

Определим **универсальный инвариант** $\mathrm{UI}(A)$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(A), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Универсальные инварианты для абелевых групп

$$\mathfrak{A}_0 = \{A |\text{ если } A \text{ – группа без кручения, либо } A = \{0\}\},$$
$$\mathfrak{A}_p = \{A |\ T(A) = T_p(A) \neq 0\},\ p \neq 0.$$

Пусть A – абелева группа.

Если $p \neq 0$, то **инвариантом** $\mathrm{UI}_p(A)$ для группы $A \in \mathfrak{A}_p$ обозначим следующий вектор:

$$\mathrm{UI}_p(A) = (\delta(A), \gamma_{p,1}(A), \gamma_{p,2}(A), \gamma_{p,3}(A), \ldots),$$

где $\delta(A) \in \{0, 1\}$, $\gamma_{p,k}(A)$ – элементарный инвариант $\gamma_{p,k}$ для группы A.

Если $p = 0$, то A – абелева группа без кручения либо $A = \{0\}$. Тогда **инвариант** $\mathrm{UI}_0(A) = \delta(A)$.

Определим **универсальный инвариант** $\mathrm{UI}(A)$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(A), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Универсальные инварианты для абелевых групп

$$\mathfrak{A}_0 = \{A |\ \text{если } A \text{ – группа без кручения, либо } A = \{0\}\},$$
$$\mathfrak{A}_p = \{A |\ T(A) = T_p(A) \neq 0\},\ p \neq 0.$$

Пусть A – абелева группа.

Если $p \neq 0$, то **инвариантом** $\mathrm{UI}_p(A)$ для группы $A \in \mathfrak{A}_p$ обозначим следующий вектор:

$$\mathrm{UI}_p(A) = (\delta(A), \gamma_{p,1}(A), \gamma_{p,2}(A), \gamma_{p,3}(A), \ldots),$$

где $\delta(A) \in \{0, 1\}$, $\gamma_{p,k}(A)$ – элементарный инвариант $\gamma_{p,k}$ для группы A.

Если $p = 0$, то A – абелева группа без кручения либо $A = \{0\}$. Тогда **инвариант** $\mathrm{UI}_0(A) = \delta(A)$.

Определим **универсальный инвариант** $\mathrm{UI}(A)$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(A), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Универсальные инварианты для абелевых групп

$$\mathfrak{A}_0 = \{A |\ \text{если } A \text{ – группа без кручения, либо } A = \{0\}\},$$
$$\mathfrak{A}_p = \{A |\ T(A) = T_p(A) \neq 0\},\ p \neq 0.$$

Пусть A – абелева группа.

Если $p \neq 0$, то **инвариантом** $\mathrm{UI}_p(A)$ для группы $A \in \mathfrak{A}_p$ обозначим следующий вектор:

$$\mathrm{UI}_p(A) = (\delta(A), \gamma_{p,1}(A), \gamma_{p,2}(A), \gamma_{p,3}(A), \ldots),$$

где $\delta(A) \in \{0, 1\}$, $\gamma_{p,k}(A)$ – элементарный инвариант $\gamma_{p,k}$ для группы A.

Если $p = 0$, то A – абелева группа без кручения либо $A = \{0\}$. Тогда **инвариант** $\mathrm{UI}_0(A) = \delta(A)$.

Определим **универсальный инвариант** $\mathrm{UI}(A)$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}(A) = (\mathrm{UI}_0(A), \mathrm{UI}_2(A), \mathrm{UI}_3(A), \mathrm{UI}_5(A), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(A), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Результат

Теорема

1. Пусть A и B – группы из $\mathfrak{A}_p$. Тогда A и B универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{UI}_p(A) = \mathrm{UI}_p(B)$.
2. Две абелевы группы A и B универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{UI}(A) = \mathrm{UI}(B)$.

Универсальные инварианты для универсальных классов абелевых групп

Описание универсальных классов в общем случае сводится к описанию универсальных классов внутри класса $\mathfrak{A}_p$. Для этого, определим **примарный универсальный инвариант** UI_p для произвольного универсального класса $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}_p(\mathcal{K}) = (\max_{A\in\mathcal{K}}(\delta(A)), \max_{A\in\mathcal{K}}(\gamma_{p,1}(A)), \max_{A\in\mathcal{K}}(\gamma_{p,2}(A)), \ldots), \text{ если } p \neq 0;$$
$$\mathrm{UI}_0(\mathcal{K}) = \max_{A\in\mathcal{K}}(\delta(A));$$

где p – простое число.

Универсальным инвариантом $\mathrm{UI}(\mathcal{K})$ для универсального класса $\mathcal{K}$ будем называть бесконечный вектор элементами которого являются все примарные универсальные инварианты $\mathrm{UI}_p(\mathcal{K})$:

$$\mathrm{UI}(\mathcal{K}) = (\mathrm{UI}_0(\mathcal{K}), \mathrm{UI}_2(\mathcal{K}), \mathrm{UI}_3(\mathcal{K}), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(\mathcal{K}), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Универсальные инварианты для универсальных классов абелевых групп

Описание универсальных классов в общем случае сводится к описанию универсальных классов внутри класса $\mathfrak{A}_p$. Для этого, определим **примарный универсальный инвариант** UI_p для произвольного универсального класса $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathrm{UI}_p(\mathcal{K}) = (\max_{A\in\mathcal{K}}(\delta(A)), \max_{A\in\mathcal{K}}(\gamma_{p,1}(A)), \max_{A\in\mathcal{K}}(\gamma_{p,2}(A)), \ldots), \text{ если } p \neq 0;$$
$$\mathrm{UI}_0(\mathcal{K}) = \max_{A\in\mathcal{K}}(\delta(A));$$

где p – простое число.

Универсальным инвариантом $\mathrm{UI}(\mathcal{K})$ для универсального класса $\mathcal{K}$ будем называть бесконечный вектор элементами которого являются все примарные универсальные инварианты $\mathrm{UI}_p(\mathcal{K})$:

$$\mathrm{UI}(\mathcal{K}) = (\mathrm{UI}_0(\mathcal{K}), \mathrm{UI}_2(\mathcal{K}), \mathrm{UI}_3(\mathcal{K}), \ldots, \mathrm{UI}_{p_i}(\mathcal{K}), \ldots),$$

где p_i – простые числа.

Результат

Теорема

Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ – два универсально аксиоматизируемых класса абелевых групп. Тогда $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_1) = \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{UI}(\mathcal{K}_1) = \mathrm{UI}(\mathcal{K}_2)$.

Канонические группы

Пусть $\mathcal{K}$ произвольный универсальный класс абелевых групп.

Заметим, что пересечение универсальных классов $\mathcal{K} \cap \mathfrak{A}_p$ также является универсальным классом, и $\mathcal{K} = ucl(\bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{K}_p)$. Мы стартуем с построения канонической группы для универсального класса $\mathcal{K}_p$.

Канонические группы

Пусть задан допустимый универсальный инвариант

$$\mathrm{UI}_p = (\delta, \gamma_{p,1}, \gamma_{p,2}, \ldots).$$

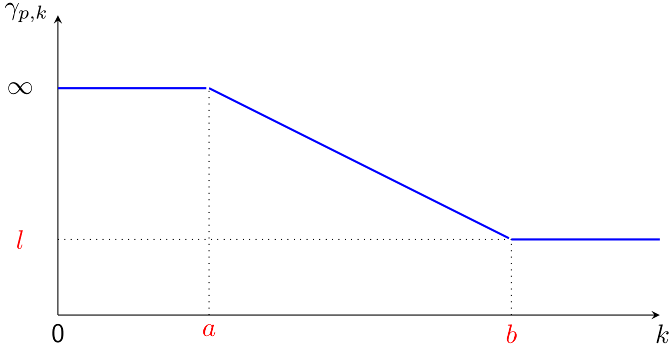
Напомним, что инвариант называется допустимым, если $\delta \in \{0, 1\}$, $\gamma_{p,k} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ и для любого k выполнено $\gamma_{p,k} \geq \gamma_{p,k+1}$.

Определим параметры $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **и** $l \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$:

1. Параметр $l \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ определяем как $l = \lim\limits_{k \to \infty} \gamma_{p,k}$;
2. Если $l = \infty$, то $a = b = 0$;
3. Если $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то параметры a и b определяются следующим образом:
   - параметр $b = \min\limits_{i}\{i \mid \gamma_{p,i} = l\}$, в этом случае $\gamma_{p,k} = l$ для всех $k \geq b$;
   - параметр $a = \max\limits_{i}\{i \mid \gamma_{p,i} = \infty\}$, если $\{i \mid \gamma_{p,i} = \infty\} = \emptyset$, то $a = 0$.

Определим параметры $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **и** $l \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$:

1. Параметр $l \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ определяем как $l = \lim\limits_{k \to \infty} \gamma_{p,k}$;
2. Если $l = \infty$, то $a = b = 0$;
3. Если $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то параметры a и b определяются следующим образом:
   - параметр $b = \min\limits_{i}\{i|\ \gamma_{p,i} = l\}$, в этом случае $\gamma_{p,k} = l$ для всех $k \geq b$;
   - параметр $a = \max\limits_{i}\{i|\ \gamma_{p,i} = \infty\}$, если $\{i|\ \gamma_{p,i} = \infty\} = \emptyset$, то $a = 0$.



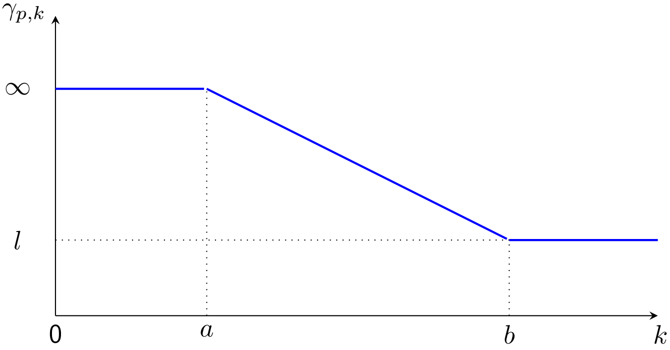
Канонические группы

Определим **примарную каноническую группу** следующим образом:

$$C = C^{\infty}(p^a) \oplus \bigoplus_{a<t\leq b} C^{w_t}(p^t) \oplus C^l(p^{\infty}) \oplus B,$$

где:

- $w_t = \gamma_{p,t} - \gamma_{p,t+1}$,
- группа B либо $\mathbb{Z}$, при $l = 0$ и $\delta = 1$, либо $B = 0$, в остальных случаях.



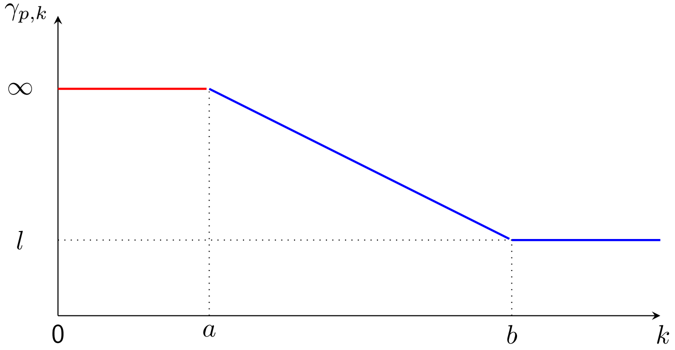
Канонические группы

Определим **примарную каноническую группу** следующим образом:

$$C = C^{\infty}(p^a) \oplus \bigoplus_{a<t\leq b} C^{w_t}(p^t) \oplus C^{l}(p^{\infty}) \oplus B,$$

где:

- $w_t = \gamma_{p,t} - \gamma_{p,t+1}$,
- группа B либо $\mathbb{Z}$, при $l = 0$ и $\delta = 1$, либо $B = 0$, в остальных случаях.



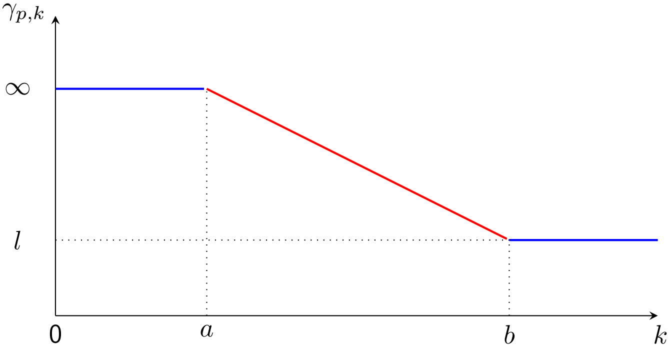
Канонические группы

Определим **примарную каноническую группу** следующим образом:

$$C = C^{\infty}(p^a) \oplus \bigoplus_{a<t\leq b} C^{w_t}(p^t) \oplus C^l(p^{\infty}) \oplus B,$$

где:

- $w_t = \gamma_{p,t} - \gamma_{p,t+1}$,
- группа B либо $\mathbb{Z}$, при $l = 0$ и $\delta = 1$, либо $B = 0$, в остальных случаях.



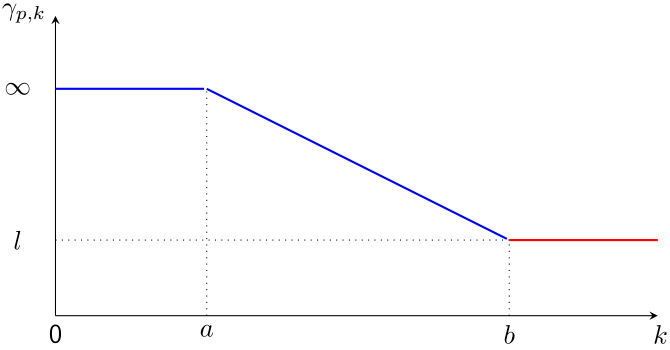
Канонические группы

Определим **примарную каноническую группу** следующим образом:

$$C = C^{\infty}(p^a) \oplus \bigoplus_{a<t\leq b} C^{w_t}(p^t) \oplus C^l(p^{\infty}) \oplus B,$$

где:

- $w_t = \gamma_{p,t} - \gamma_{p,t+1}$,
- группа B либо $\mathbb{Z}$, при $l = 0$ и $\delta = 1$, либо $B = 0$, в остальных случаях.



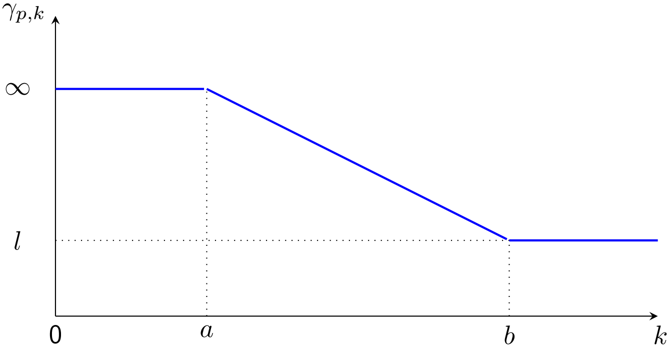
Канонические группы

Определим **примарную каноническую группу** следующим образом:

$$C = C^{\infty}(p^a) \oplus \bigoplus_{a<t\leq b} C^{w_t}(p^t) \oplus C^l(p^{\infty}) \oplus B,$$

где:

- $w_t = \gamma_{p,t} - \gamma_{p,t+1}$,
- группа B либо $\mathbb{Z}$, при $l = 0$ и $\delta = 1$, либо $B = 0$, в остальных случаях.



Результаты

Предложение

Если примарная каноническая группа $C \in \mathrm{CGr}_p$ построена по допустимому универсальному инварианту UI_p, то $\mathrm{UI}_p(C) = \mathrm{UI}_p$.

Теорема

Для групп из класса CGr_p верны следующие утверждения:

1. Если $C_1, C_2 \in \mathrm{CGr}_p$ пара неизоморфных групп, то $\mathrm{Th}_\forall(C_1) \neq \mathrm{Th}_\forall(C_2)$;
2. Для любой группы A из класса $\mathfrak{A}_p$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}_p$, что $\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(C)$;
3. Для любого универсального класса абелевых групп $\mathcal{K}$ из $\mathfrak{A}_p$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}_p$, что $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_\forall(C)$.

Результаты

Предложение

Если примарная каноническая группа $C \in \mathrm{CGr}_p$ построена по допустимому универсальному инварианту UI_p, то $\mathrm{UI}_p(C) = \mathrm{UI}_p$.

Теорема

Для групп из класса CGr_p верны следующие утверждения:

1. Если $C_1, C_2 \in \mathrm{CGr}_p$ пара неизоморфных групп, то $\mathrm{Th}_\forall(C_1) \neq \mathrm{Th}_\forall(C_2)$;
2. Для любой группы A из класса $\mathfrak{A}_p$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}_p$, что $\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(C)$;
3. Для любого универсального класса абелевых групп $\mathcal{K}$ из $\mathfrak{A}_p$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}_p$, что $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_\forall(C)$.

Канонические группы

Пусть задан допустимы универсальный инвариант:

$$\mathrm{UI} = (\mathrm{UI}_0, \mathrm{UI}_2, \mathrm{UI}_3, \mathrm{UI}_5, \ldots, \mathrm{UI}_p, \ldots).$$

Для каждого инварианта UI_p, где p – простое число, обозначим за l_p следующий предел $l_p = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{p,k}$.

Так же по каждому инварианту UI_p построим примарную каноническую группу C_p.

Каноническая группа C для инварианта UI будет иметь следующий вид:

$$C = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_p(C_p) \oplus B,$$

где:

- $T_p(C_p)$ – периодическая часть примарной канонической группы C_p,
- группа B либо равна $\mathbb{Z}$ если $\delta = 1$ и $l_p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$, либо $B = 0$ в остальных случаях.

Канонические группы

Пусть задан допустимы универсальный инвариант:

$$\mathrm{UI} = (\mathrm{UI}_0, \mathrm{UI}_2, \mathrm{UI}_3, \mathrm{UI}_5, \ldots, \mathrm{UI}_p, \ldots).$$

Для каждого инварианта UI_p, где p – простое число, обозначим за l_p следующий предел $l_p = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{p,k}$.

Так же по каждому инварианту UI_p построим примарную каноническую группу C_p.

Каноническая группа C для инварианта UI будет иметь следующий вид:

$$C = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_p(C_p) \oplus B,$$

где:

- $T_p(C_p)$ – периодическая часть примарной канонической группы C_p,
- группа B либо равна $\mathbb{Z}$ если $\delta = 1$ и $l_p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$, либо $B = 0$ в остальных случаях.

Канонические группы

Пусть задан допустимы универсальный инвариант:

$$\mathrm{UI} = (\mathrm{UI}_0, \mathrm{UI}_2, \mathrm{UI}_3, \mathrm{UI}_5, \ldots, \mathrm{UI}_p, \ldots).$$

Для каждого инварианта UI_p, где p – простое число, обозначим за l_p следующий предел $l_p = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{p,k}$.

Так же по каждому инварианту UI_p построим примарную каноническую группу C_p.

Каноническая группа C для инварианта UI будет иметь следующий вид:

$$C = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_p(C_p) \oplus B,$$

где:

- $T_p(C_p)$ – периодическая часть примарной канонической группы C_p,
- группа B либо равна $\mathbb{Z}$ если $\delta = 1$ и $l_p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$, либо $B = 0$ в остальных случаях.

Канонические группы

Пусть задан допустимы универсальный инвариант:

$$\mathrm{UI} = (\mathrm{UI}_0, \mathrm{UI}_2, \mathrm{UI}_3, \mathrm{UI}_5, \ldots, \mathrm{UI}_p, \ldots).$$

Для каждого инварианта UI_p, где p – простое число, обозначим за l_p следующий предел $l_p = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{p,k}$.

Так же по каждому инварианту UI_p построим примарную каноническую группу C_p.

Каноническая группа C для инварианта UI будет иметь следующий вид:

$$C = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_p(C_p) \oplus B,$$

где:

- $T_p(C_p)$ – периодическая часть примарной канонической группы C_p,
- группа B либо равна $\mathbb{Z}$ если $\delta = 1$ и $l_p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$, либо $B = 0$ в остальных случаях.

Результат

Множество всех канонических групп, построенных по допустимым универсальным инвариантам UI обозначим через CGr.

Теорема

Для групп из класса CGr верны следующие утверждения:

1. Если $C_1, C_2 \in \mathrm{CGr}$ пара неизоморфных групп, то $\mathrm{Th}_\forall(C_1) \neq \mathrm{Th}_\forall(C_2)$;
2. Для любой абелевой группы A существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}$, что $\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(C)$;
3. Для любого универсального класса абелевых групп $\mathcal{K}$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}$, что $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_\forall(C)$.

Результат

Множество всех канонических групп, построенных по допустимым универсальным инвариантам UI обозначим через CGr.

Теорема

Для групп из класса CGr верны следующие утверждения:

1. Если $C_1, C_2 \in \mathrm{CGr}$ пара неизоморфных групп, то $\mathrm{Th}_\forall(C_1) \neq \mathrm{Th}_\forall(C_2)$;
2. Для любой абелевой группы A существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}$, что $\mathrm{Th}_\forall(A) = \mathrm{Th}_\forall(C)$;
3. Для любого универсального класса абелевых групп $\mathcal{K}$ существует такая единственная группа $C \in \mathrm{CGr}$, что $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_\forall(C)$.

Спасибо за внимание!