Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли

Э. Ю. Даниярова

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

30 апреля 2015 г.

F_r — свободная конечно порождённая метабелева алгебра Ли ранга r над полем k со свободной базой $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $r \geqslant 2$, $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

- *Тождество антикоммутативности*: $a \circ a = 0$, $a \circ b = -b \circ a$;
- *Тождество Якоби*: $(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = 0$.
- *Тождество метабелевости*: $(a \circ b) \circ (c \circ d) = 0$.

- $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ — коммутативное кольцо многочленов,
- T — свободный модуль над кольцом R с базой $t_1, \ldots, t_r$,
- M_r — матричная метабелева алгебра Ли над k:

$$M_r = \left\{ \left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; u \in T, \; f \in R - \text{лин. однородный многочлен} \right\}.$$

$$\alpha \cdot \left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \alpha \cdot f & \alpha \cdot u \\ 0 & 0 \end{array} \right), \alpha \in k;$$

$$\left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} g & v \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} f+g & u+v \\ 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$\left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{cc} g & v \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & u \cdot g - v \cdot f \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Теорема

Отображение $a_i \to \left(\begin{array}{cc} x_i & t_i \\ 0 & 0 \end{array} \right)$, $i = 1, \ldots, r$, определяет вложение F_r в M_r.

Алгебраическая геометрия над F_r в языке

$$\langle +^{(2)},\ \circ^{(2)},\ \{k_\alpha^{(1)} \mid \alpha \in k\},\ c_a, a \in F_r\rangle.$$

Задача 1: Классификация алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма.

Задача 2: Классификация координатных алгебр алгебраических множеств над F_r.

Задача 3: Классификация неприводимых алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма:

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m.$$

Задача 4: Классификация координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над F_r:

$$\Gamma(Y) \xrightarrow[\text{подпрямо вкл.}]{} \Gamma(Y_1) \oplus \ldots \oplus \Gamma(Y_m).$$

Алгебраическая геометрия над F_r в языке

$$\langle +^{(2)},\ \circ^{(2)},\ \{k_\alpha^{(1)} \mid \alpha \in k\},\ c_a, a \in F_r\rangle.$$

Задача 1: Классификация алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма.

Задача 2: Классификация координатных алгебр алгебраических множеств над F_r.

Задача 3: Классификация неприводимых алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма:

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m.$$

Задача 4: Классификация координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над F_r:

$$\Gamma(Y) \xrightarrow[\text{подпрямо вкл.}]{} \Gamma(Y_1) \oplus \ldots \oplus \Gamma(Y_m).$$

Алгебраическая геометрия над F_r в языке

$$\langle +^{(2)},\ \circ^{(2)},\ \{k_\alpha^{(1)} \,|\, \alpha \in k\},\ c_a, a \in F_r\rangle.$$

Задача 1: Классификация алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма.

Задача 2: Классификация координатных алгебр алгебраических множеств над F_r.

Задача 3: Классификация неприводимых алгебраических множеств над F_r с точностью до изоморфизма:

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m.$$

Задача 4: Классификация координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над F_r:

$$\Gamma(Y) \xrightarrow[\text{подпрямо вкл.}]{} \Gamma(Y_1) \oplus \ldots \oplus \Gamma(Y_m).$$

Решение задачи 4 о классификации неприводимых координатных алгебр

Задача 4: Классификация координатных алгебр **неприводимых** алгебраических множеств над F_r.

Объединяющая теорема

Для любой конечно порождённой F_r-алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:

1. Алгебра A является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над F_r;
2. $A \in F_r - \mathrm{ucl}(F_r)$;
3. Алгебра A F_r-дискриминируется алгеброй F_r.

Роль поля k

Случай 1: Поле k конечно.

Случай 2: Поле k бесконечно.

Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников
Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы
Фундам. и прикл. мат., 9:3, 2003, 37–63

Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников
Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля
Фундам. и прикл. мат., 9:3, 2003, 65–87

Теорема

Для произвольной конечно порождённой F_r-алгебры Ли A над конечным полем k следующие условия эквивалентны:

1. A является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над F_r;
2. A удовлетворяет списку аксиом Φ_r;
3. радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$
   - абелев,
   - имеет коразмерность r: $\dim A/\mathrm{Fit}(A) = r$,
   - как модуль над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ не имеет кручения,
   - подмодуль $\mathrm{Fit}(F_r)$ выделяется в $\mathrm{Fit}(A)$ прямым слагаемым;
4. A F_r-изоморфна алгебре $F_r \oplus M$ для некоторого конечно порождённого модуля без кручения M над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$.

- A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k.
- Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — это идеал алгебры A, порождённый элементами всех нильпотентных идеалов алгебры A.
- $m = \dim(A/\mathrm{Fit}(A))$.
- Если $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то он обладает структурой модуля над кольцом многочленов $R_A = k[x_1, \ldots, x_m]$.
- Тогда $A = A/\mathrm{Fit}(A) \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$.

Радикал Фиттинга

- A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k.
- Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — это идеал алгебры A, порождённый элементами всех нильпотентных идеалов алгебры A.
- $m = \dim(A/\mathrm{Fit}(A))$.
- Если $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то он обладает структурой модуля над кольцом многочленов $R_A = k[x_1, \ldots, x_m]$.
- Тогда $A = A/\mathrm{Fit}(A) \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$.

Радикал Фиттинга

- A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k.
- Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — это идеал алгебры A, порождённый элементами всех нильпотентных идеалов алгебры A.
- $m = \dim(A/\mathrm{Fit}(A))$.
- Если $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то он обладает структурой модуля над кольцом многочленов $R_A = k[x_1, \ldots, x_m]$.
- Тогда $A = A/\mathrm{Fit}(A) \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$.

Радикал Фиттинга

- A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k.
- Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — это идеал алгебры A, порождённый элементами всех нильпотентных идеалов алгебры A.
- $m = \dim(A/\mathrm{Fit}(A))$.
- Если $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то он обладает структурой модуля над кольцом многочленов $R_A = k[x_1, \dots, x_m]$.
- Тогда $A = A/\mathrm{Fit}(A) \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$.

В алгебре F_r:

- $\dim(F_r/\mathrm{Fit}(F_r)) = r$,
- $F_r/\mathrm{Fit}(F_r) = \mathrm{lin}_k\{a_1, \dots, a_r\}$,
- M — модуль без кручения над кольцом $R = k[x_1, \dots, x_r]$,
- $F_r \oplus M = \mathrm{lin}_k\{a_1, \dots, a_r\} \oplus_k \mathrm{Fit}(F_r) \oplus_R M$.

Кручение в R-модуле M — это $y \cdot f = 0$ для $0 \neq y \in M$ и $0 \neq f \in R$.

Аннулятор $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \mid y \cdot f = 0\}$, $y \in M$.

В алгебре F_r:

- $\dim(F_r/\mathrm{Fit}(F_r)) = r$,
- $F_r/\mathrm{Fit}(F_r) = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\}$,
- M — модуль без кручения над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$,
- $F_r \oplus M = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\} \oplus_k \mathrm{Fit}(F_r) \oplus_R M$.

Кручение в R-модуле M — это $y \cdot f = 0$ для $0 \neq y \in M$ и $0 \neq f \in R$.

Аннулятор $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \mid y \cdot f = 0\}$, $y \in M$.

Радикал Фиттинга

В алгебре F_r:

- $\dim(F_r/\mathrm{Fit}(F_r)) = r$,
- $F_r/\mathrm{Fit}(F_r) = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\}$,
- M — модуль без кручения над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$,
- $F_r \oplus M = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\} \oplus_k \mathrm{Fit}(F_r) \oplus_R M$.

Кручение в R-модуле M — это $y \cdot f = 0$ для $0 \neq y \in M$ и $0 \neq f \in R$.

Аннулятор $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \mid y \cdot f = 0\}$, $y \in M$.

Радикал Фиттинга

В алгебре F_r:

- $\dim(F_r/\mathrm{Fit}(F_r)) = r$,
- $F_r/\mathrm{Fit}(F_r) = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\}$,
- M — модуль без кручения над кольцом $R = k[x_1, \ldots, x_r]$,
- $F_r \oplus M = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\} \oplus_k \mathrm{Fit}(F_r) \oplus_R M$.

Кручение в R-модуле M — это $y \cdot f = 0$ для $0 \neq y \in M$ и $0 \neq f \in R$.

Аннулятор $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \mid y \cdot f = 0\}$, $y \in M$.

Классификация неприводимых координатных алгебра над F_r над конечным полем k

Теорема

Для произвольной конечно порождённой F_r-алгебры Ли A над конечным полем k следующие условия эквивалентны:

1. A является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над F_r;
2. A удовлетворяет списку аксиом Φ_r;
3. радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$
   - абелев,
   - имеет коразмерность r: $\dim A/\mathrm{Fit}(A) = r$,
   - как модуль над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ не имеет кручения,
   - подмодуль $\mathrm{Fit}(F_r)$ выделяется в $\mathrm{Fit}(A)$ прямым слагаемым;
4. A F_r-изоморфна алгебре $F_r \oplus M$ для некоторого конечно порождённого модуля без кручения M над кольцом многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$.

Классификация неприводимых координатных алгебр над F_r над бесконечным полем k

Теорема

Для произвольной конечно порождённой F_r-алгебры Ли A над бесконечным полем k следующие условия эквивалентны:

1. A является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над F_r;
2. A удовлетворяет списку аксиом Φ_r;
3. радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$
   - абелев,
   - …

Классификация неприводимых координатных алгебра над F_r над бесконечным полем k

Теорема

...

1. ...
2. ...
3. радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$
   - абелев,
   - как модуль над кольцом многочленов $R_{F_r} = k[x_1, \ldots, x_r]$ не имеет кручения,
   - как модуль над кольцом многочленов R_A либо не имеет кручения, либо имеет такое кручение, что аннуляторы всех его ненулевых элементов совпадают и равны **радикалу I некоторого невырожденного проектривного многообразия над полем** k;
   - в каждом конечно порождённом R_{F_r}-подмодуле $\mathrm{Fit}(F_r) \subseteq M \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ подмодуль $\mathrm{Fit}(F_r)$ выделяется прямым слагаемым;
   - любые R_{F_r}-независимые элементы из $\mathrm{Fit}(F_r)$ являются R_A/I-независимыми в $\mathrm{Fit}(A)$.

Итоги

Структура неприводимых координатных алгебр над F_r:

Поле k конечно:

$$F_r \to F_r \oplus M = \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r\} \oplus_k \mathrm{Fit}(F_r) \oplus_R M.$$

Поле k бесконечно:

$$F_r \to F_r \oplus M \to \mathrm{lin}_k\{a_1, \ldots, a_r, d_1, \ldots, d_m\} \oplus_k \ldots$$

Построение неприводимой координатной алгебры над F_r по проективному многообразию над k

1. Y — невырожденное проективное многообразие над полем k,
2. $I = \mathrm{Rad}(Y)$, $I \lhd k[x_1, \ldots, x_m]$, $m \geqslant 3$,
3. F_{r+m} — свободная метабелева алгебра Ли над полем k ранга $r + m$,
4. $M = \mathrm{Fit}(F_{r+m})$,
5. $V = \mathrm{lin}_k\{x_1, \ldots, x_{r+m}\}$, $R = k[x_1, \ldots, x_{r+m}]$,
6. $Q = \{y \in M \mid \exists\, f \notin I' \; y \cdot f \in M \cdot I'\}$, где I' — идеал кольца R, порождённый множеством I,
7. в фактормодуле $N = M/Q$ аннуляторы всех ненулевых элементов равны I',
8. на прямой сумме $A = V \oplus_k N$ определяется структура метабелевой алгебры Ли, согласованная с F_r-эпиморфизмом $F_{r+m} \to A$,
9. A F_r-дискриминируется алгеброй F_r, поэтому является неприводимой координатной алгеброй над F_r.

Поле k бесконечно

- Э. Ю. Даниярова,
  Q-идеалы в кольцах многочленов и Q-модули над кольцами многочленов
  SEMR, 4, 2007, 64–84
- Э. Ю. Даниярова,
  Метабелевы U-алгебры Ли
  SEMR, 5, 2008, 355–382
- Э. Ю. Даниярова,
  Метабелевы Q-алгебры Ли
  SEMR, 6, 2009, 26–48
- Э. Ю. Даниярова,
  Аксиомы метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли
  SEMR, 9, 2012, 266–284