

Задача о максимальном потоке в булевозначной сети и ее приложения

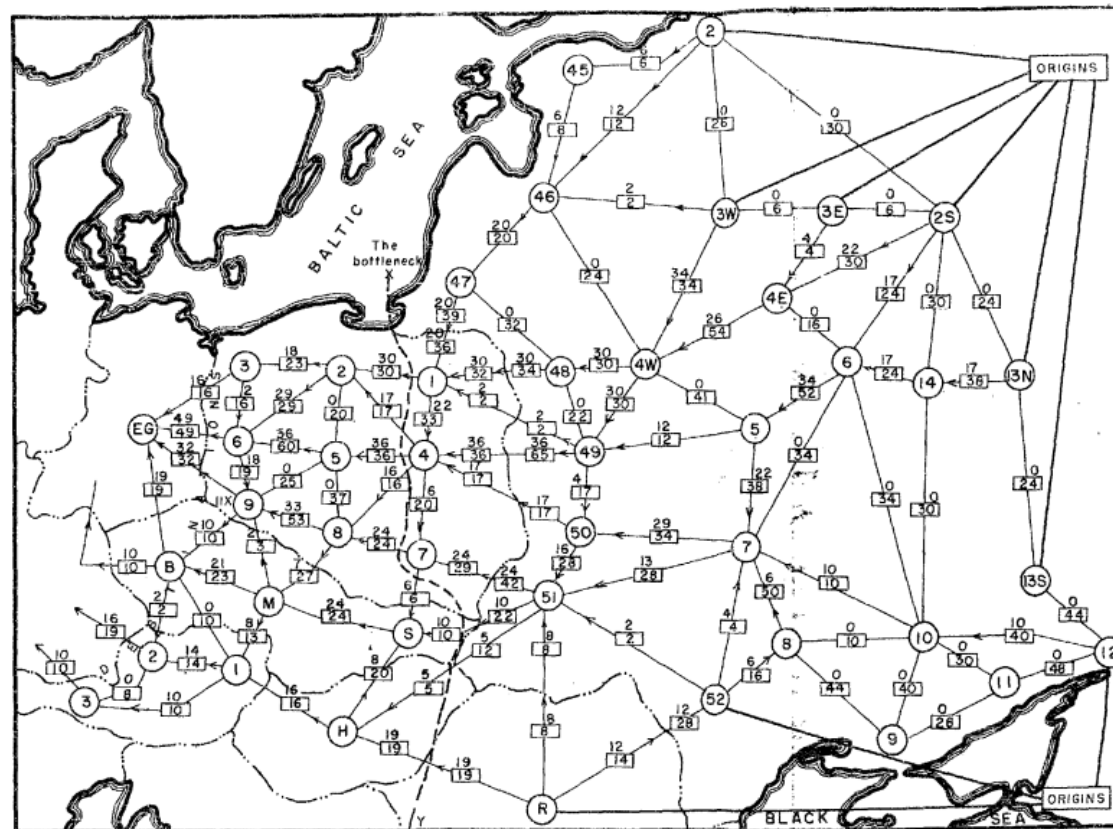
Щерба Евгений Викторович,

Омский государственный технический университет

Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач

Омск, 29 апреля 2015

Задача о максимальном потоке в транспортной сети



SECRET RM-1573
10-24-55
-53-

Fig. 7 — Traffic pattern: entire network available

Legend:

--- International boundary

(B) Railway operating division

← 12 → Capacity: 12 each way per day.
Required flow of 9 per day toward destinations (in direction of arrow) with equivalent number of returning trains in opposite direction

All capacities in trains of 1000's of tons each way per day

Origins: Divisions 2, 3W, 3E, 2S, 13N, 13S, 12, 52 (USSR), and Roumania

Destinations: Divisions 3, 6, 9 (Poland); B (Czechoslovakia); and 2, 3 (Austria)

Alternative destinations: Germany or East Germany

Note IIX at Division 9, Poland

Assumption:

Entire network available for east-west traffic (no allowance for civilian or economic traffic)

Results:

- 163,000 tons per day can be delivered from points of origin to destinations.
- 147,000 tons per day can be delivered without using Austrian lines.
- 152,000 tons per day can be delivered into Germany by all lines.
- 126,000 tons per day can be delivered into East Germany without using Austrian lines.

T.E. Harris, F.S. Ross, Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities, Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955.

Задача о максимальном потоке в транспортной сети

Транспортная сеть — ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором каждая дуга $(u, v) \in E$ имеет пропускную способность $c(u, v) \geq 0$ и поток $f(u, v)$.

Потоком из s в t в сети G называется функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \text{ для всех } (u, v) \in E;$$

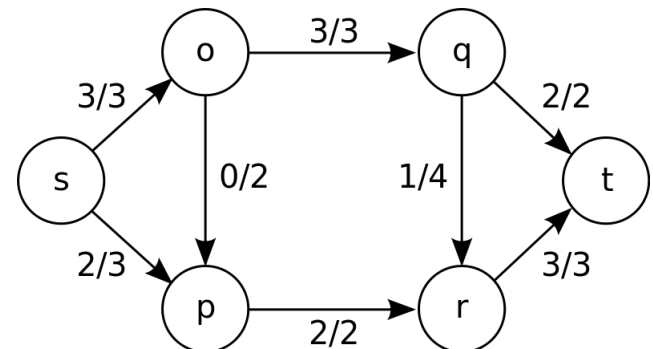
$$\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) = \begin{cases} b, & \text{если } u = s \\ 0, & \text{если } u \notin \{s, t\} \\ -b, & \text{если } u = t \end{cases}$$

Величина потока: $v(f) = \sum_{v \in V} f(s, v)$

Поток f^* — максимальный, если

$$v(f^*) = \max_{f \text{ — поток}} v(f)$$

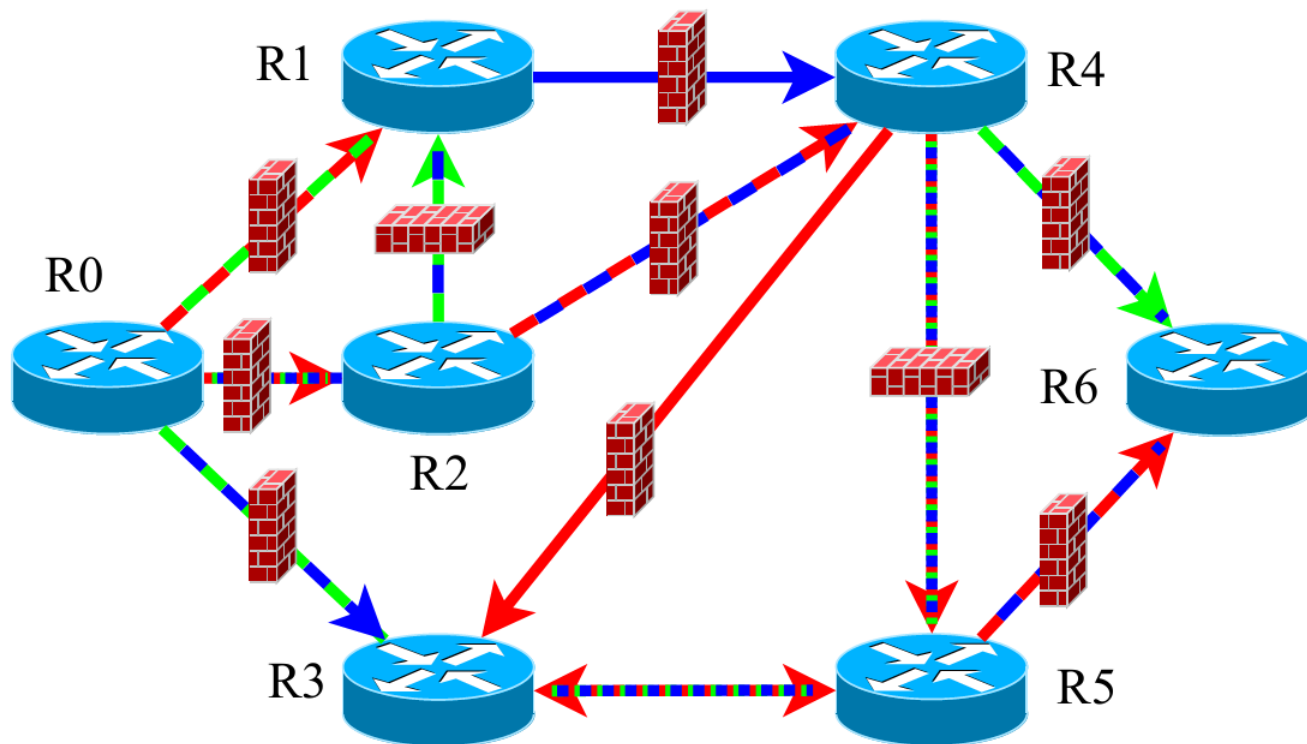
Требуется найти максимальный поток f из s в t .



Задача о максимальном потоке в транспортной сети

- Ford L.,R., Fulkerson D.,R. Maximal flow through a network // Canadian Journal of Mathematics. - 1956. - V.8. - P. 399-403.
- Диниц Е.,А., Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой // Доклады АН СССР. - 1970. - Т.194. - №4. - С.754-757.
- Карзанов А.,А., Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков // Доклады АН СССР. - 1974. - Т.215. - №1. - С.49-53.
- Goldberg A.,V., Tarjan R.,E., Efficient Maximum Flow Algorithms // Communications of the ACM. - 2014. - V.57. - №8. - P.82-89.

Содержательная постановка задачи



Пример. Множество типов данных, разрешенных к передаче от маршрутизатора R0 к R6 состоит из {HTTP, Skype}, поскольку тип данных {FTP} фильтруется.

Содержательная постановка задачи

В общем случае существует проблема определения множества всех разрешенных типов данных, которые могут быть переданы по сети от источника к получателю, и путей для их передачи.

Булевозначная сеть

Пусть M – конечное множество с числом элементов m .

$P(M)$ – множество всех подмножеств для M , $|P(M)| = 2^m$.

$P(M)$ является частично упорядоченным множеством $A \leq B \leftrightarrow A \subseteq B$.

Через 0 мы будем обозначать пустое множество, через 1 – все множество M .

Булева алгебра B определена как $\langle P(M) | \wedge, \vee, \neg \rangle$.

Булевозначная сеть – ориентированный мультиграф $G = (V, E)$, каждой дуге $e \in E$ которого поставлен в соответствие элемент $s(e) \in B$ называемый пропускной способностью (меткой) дуги.

- Салий В.Н., Оптимизация в булевозначных сетях // Дискретная математика. - 2005. - Т.17. - №1. - С.141-146.

Формализация задачи

M – множество типов данных,

V – множество маршрутизаторов,

E – множество каналов связи,

$c(e)$ – типы данных, разрешенные к передаче по каналу e ,

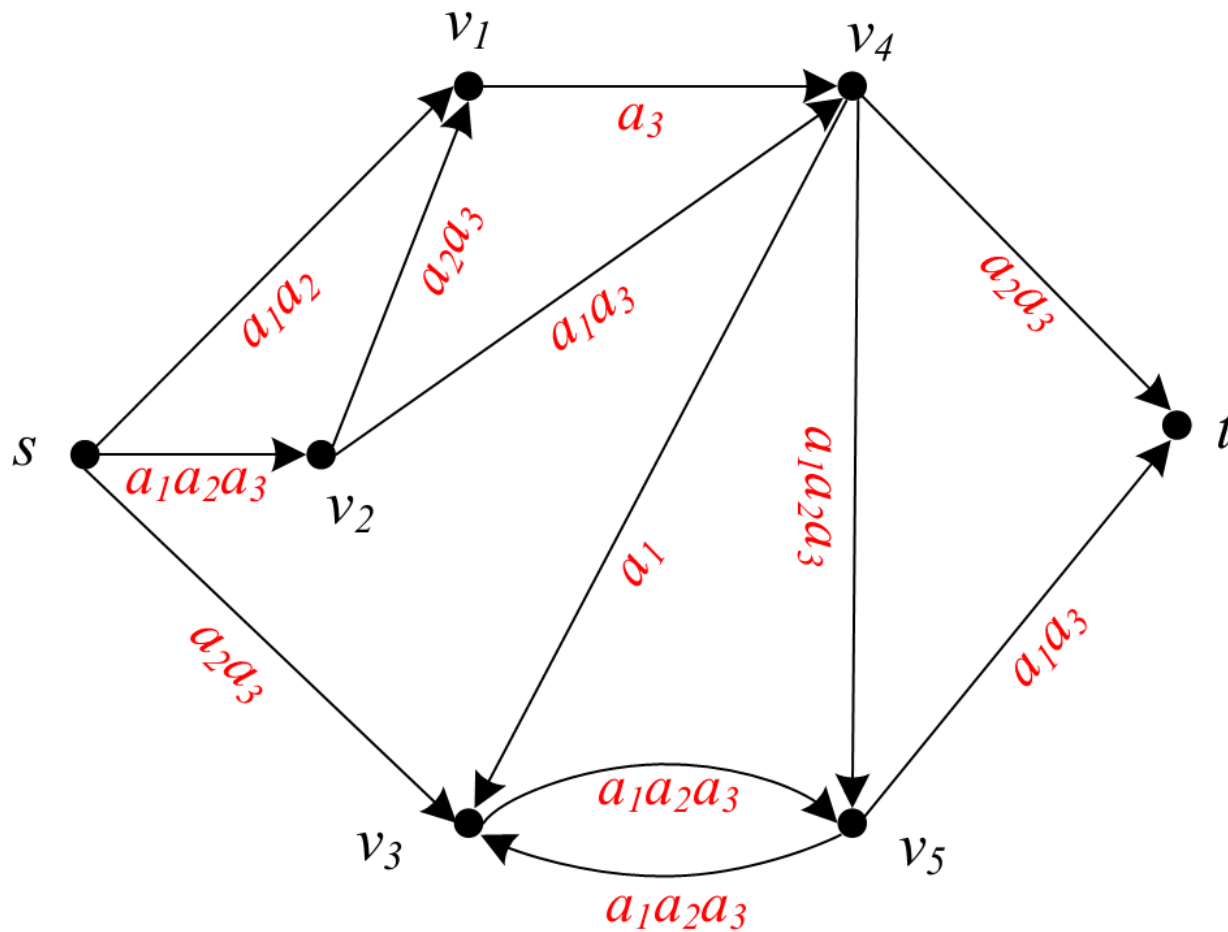
s – отправитель данных,

t – получатель данных.

Таким образом, задана булевозначная B -сеть $G = (V, E)$ с функцией пропускных способностей $c(e)$, источником s , стоком t .

Формализация задачи

$M = \{a_1, a_2, a_3\}$, $P(M) = \{0, a_1, a_2, a_3, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, 1\}$, $B = \langle P(M) | \wedge, \vee, \neg \rangle$.



Определение потока в булевозначных сетях

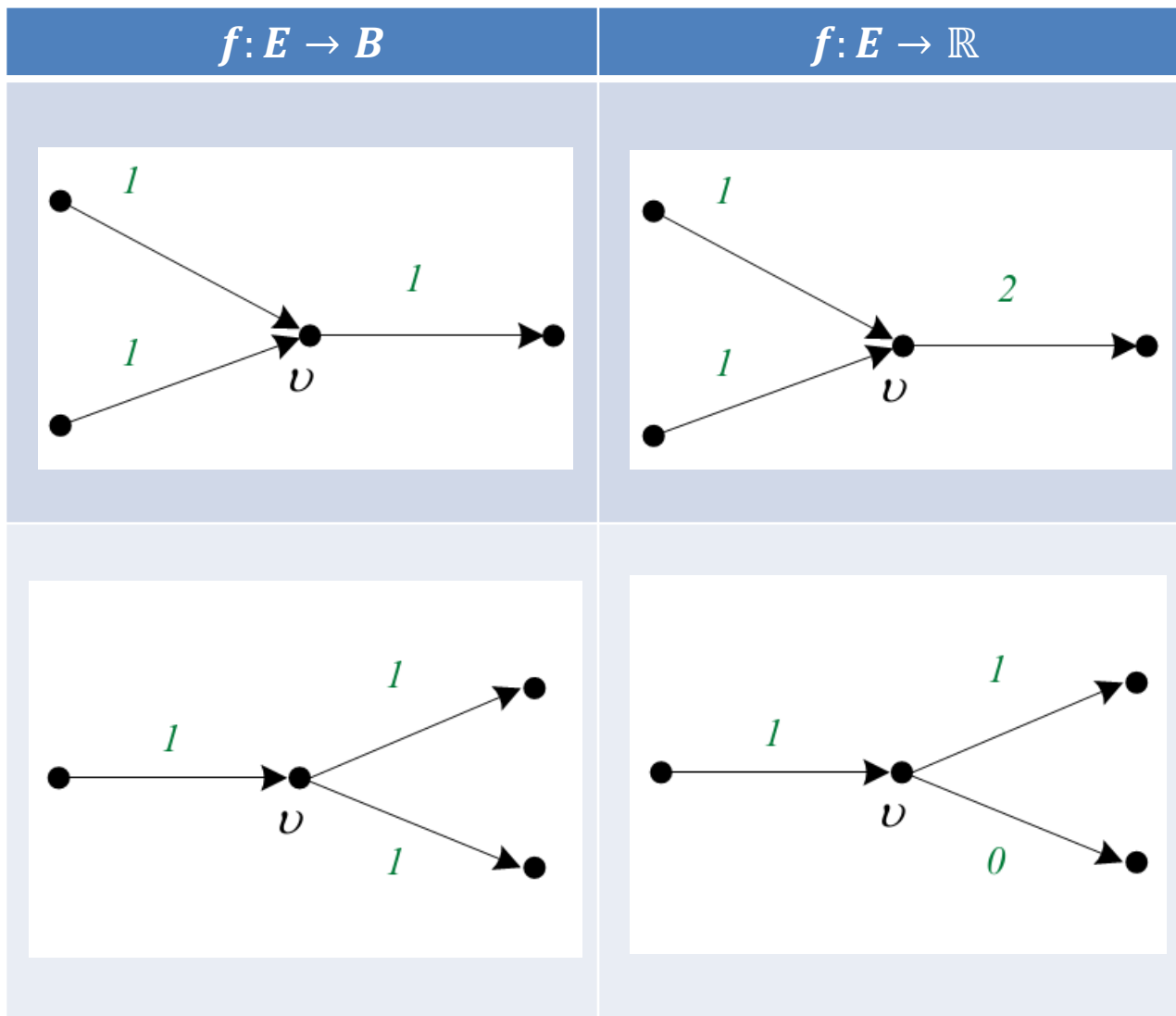
Пусть задана B -сеть $G = (V, E)$ с источником s , стоком t , каждая дуга $e \in E$ имеет пропускную способность $c(e) \in B$. *Потоком из s в t* в данной сети назовём функцию $f: E \rightarrow B$, удовлетворяющую условиям:

$$0 \leq f(e) \leq c(e) \text{ для всех } e \in E \quad (1)$$

$$\bigvee_{u \in V} f(u, v) = \bigvee_{u \in V} f(v, u) \text{ для всех } v \in V \setminus \{s, t\} \quad (2)$$

$$\bigvee_{u \in V} f(s, u) = \bigvee_{v \in V} f(v, t) \quad (3)$$

Свойства потоков в булевозначных сетях



Величина и мощность потока

Величиной потока f будем называть элемент булевой алгебры $b \in B$:

$$b(f) = \bigvee_{v \in V} f(s, v)$$

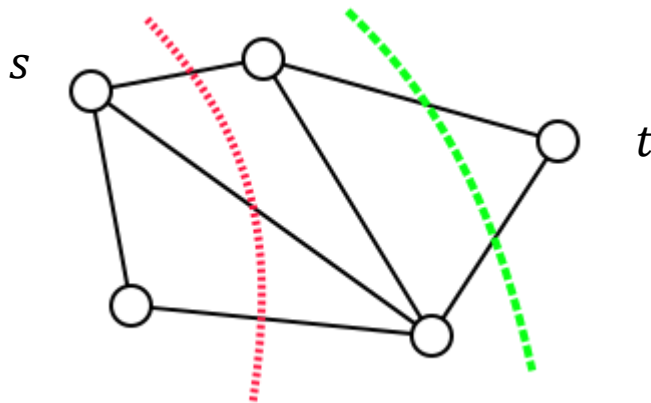
Мощностью потока $|b(f)|$ будем называть число атомов (элементов множества M), содержащихся в его величине.

Поток f^* называется *максимальным*, если $|b(f^*)| = \max_f |b(f)|$.

Разрезы

Пусть $W \subseteq V$, $\overline{W} = V \setminus W$. *Разрезом* $(W, \overline{W})$ в сети G называется множество всех дуг вида (u, v) , где $u \in W$ и $v \in \overline{W}$. Если $s \in W$ и $t \in \overline{W}$, то разрез $(W, \overline{W})$ *разделяет* вершины s и t .

Пример:



Пропускная способность и мощность разреза

Пропускной способностью разреза $(W, \overline{W})$ будем называть элемент булевой алгебры $c \in B$:

$$c(W, \overline{W}) = \bigvee_{e \in (W, \overline{W})} c(e)$$

Мощностью разреза $|c(W, \overline{W})|$ будем называть число атомов (элементов множества M), содержащихся в его пропускной способности.

Среди всех разрезов, разделяющих s и t , разрез с минимальной мощностью называется *минимальным*.

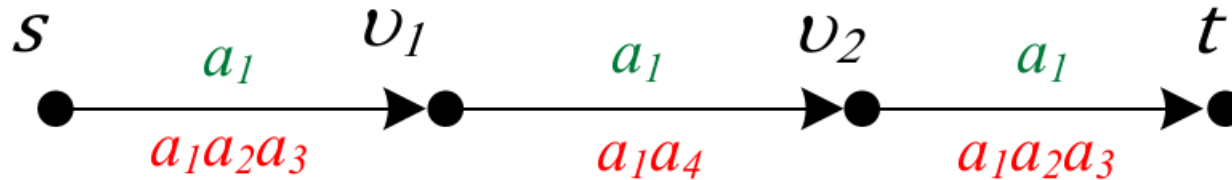
Утверждение

В любой конечной булевозначной сети $G = (V, E)$ величина максимального потока f из s в t не превосходит пропускную способность минимального разреза $(W, \overline{W})$, разделяющего s и t .

$$b(f) \leq c(W, \overline{W})$$

Утверждение

В любой конечной булевозначной B -сети $G = (V, E)$ величина максимального потока f из s в t не превосходит пропускную способность минимального разреза $(W, \overline{W})$, разделяющего s и t .



Пример: $b(f) < c(W, \overline{W})$

Формализация задачи

M – множество типов данных,

V – множество маршрутизаторов,

E – множество каналов связи,

$c(e)$ – типы данных, разрешенные к передаче по каналу e ,

s – отправитель данных,

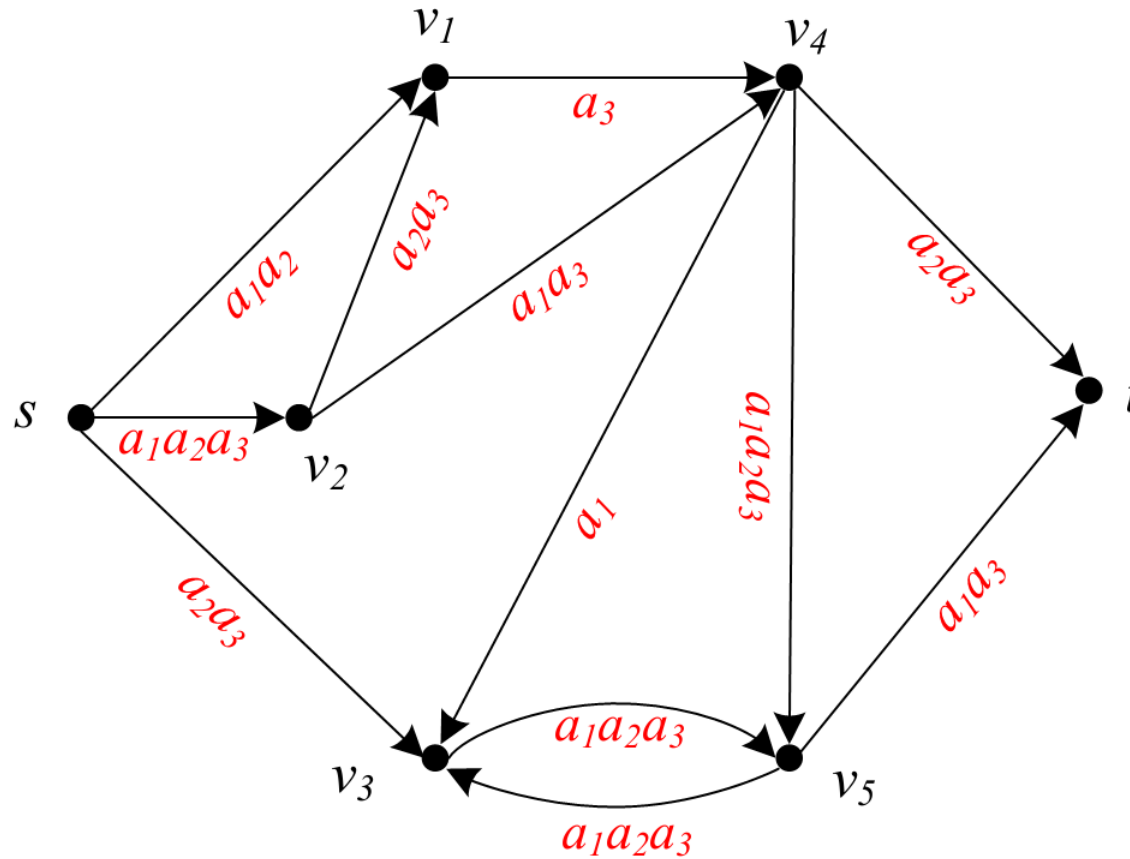
t – получатель данных.

Таким образом, задана булевозначная B -сеть $G = (V, E)$ с функцией пропускных способностей $c(e)$, источником s , стоком t .

Задача: Требуется определить максимальный поток f из s в t .

Пример задачи

$$M = \{a_1, a_2, a_3\}, P(M) = \{0, a_1, a_2, a_3, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, 1\}, B = \langle P(M) \mid \wedge, \vee, \neg \rangle.$$



Требуется найти максимальный поток f из s в t .

Алгоритм поиска максимального потока

Пусть s — корень и t — сток в некоторой B -сети $G = (V, E)$. Требуется найти максимальный поток f из s в t .

1. Положить $f(e) = \{0\}$ для всех $e \in E$.
2. На каждом шаге $i = 1, \dots, l$, где $l = |M|$, для элемента $a_i \in M$ построить новый граф $G_i = (V, E_i)$, в котором $e \in E_i$, если $a_i \in c(e)$.
3. В полученном графе $G_i = (V, E_i)$ найти путь P из s в t . Если $e \in P$, то получить новое значение и перейти на шаг $i + 1$:

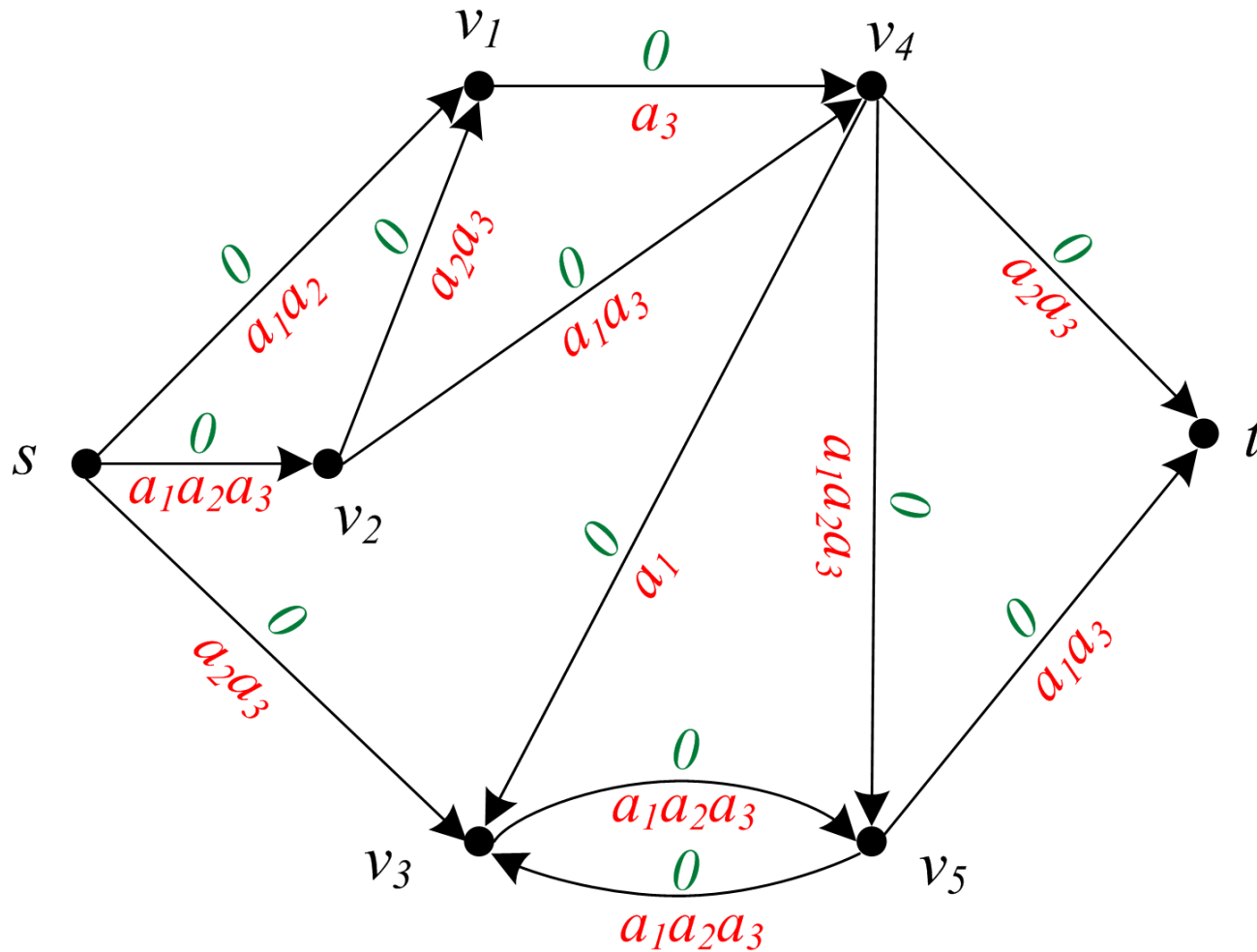
$$f(e) = f(e) \cup a_i$$

Если такой путь P отсутствует, то перейти на шаг $i + 1$.

По завершении всех шагов алгоритма полученный поток f будет максимальным.

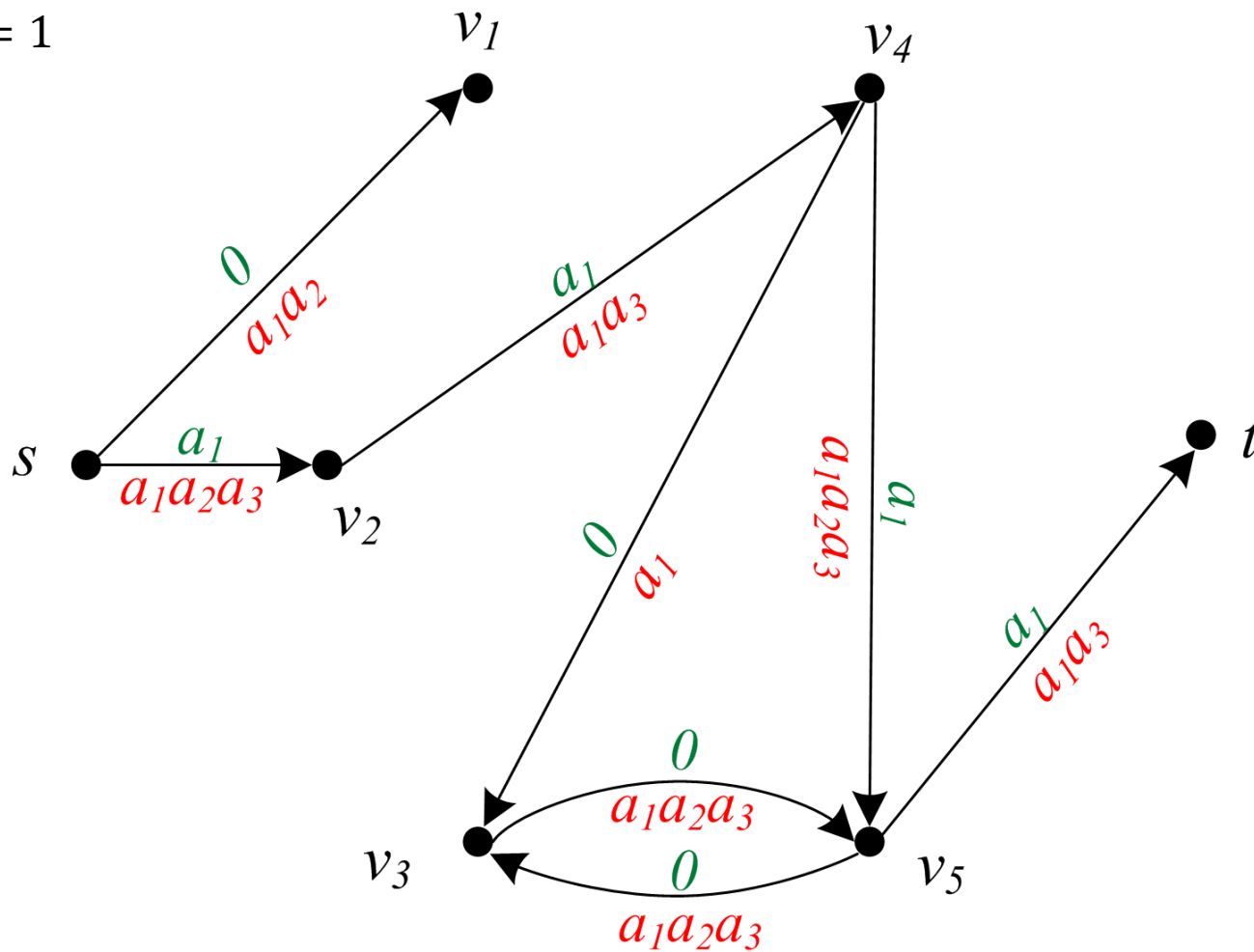
Оценка сложности: $O(|M||V|^2)$.

Пример работы алгоритма



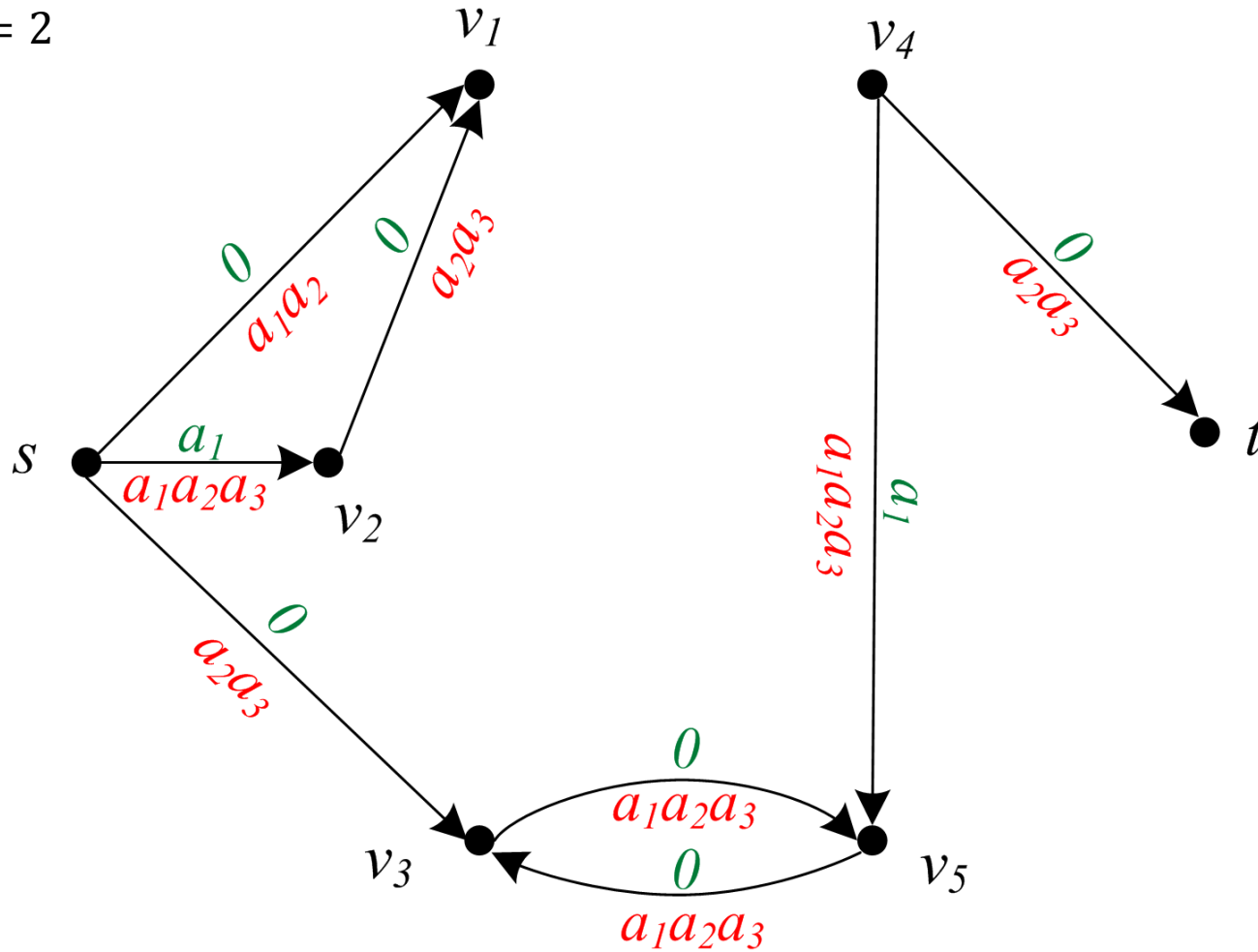
Пример работы алгоритма

$i = 1$



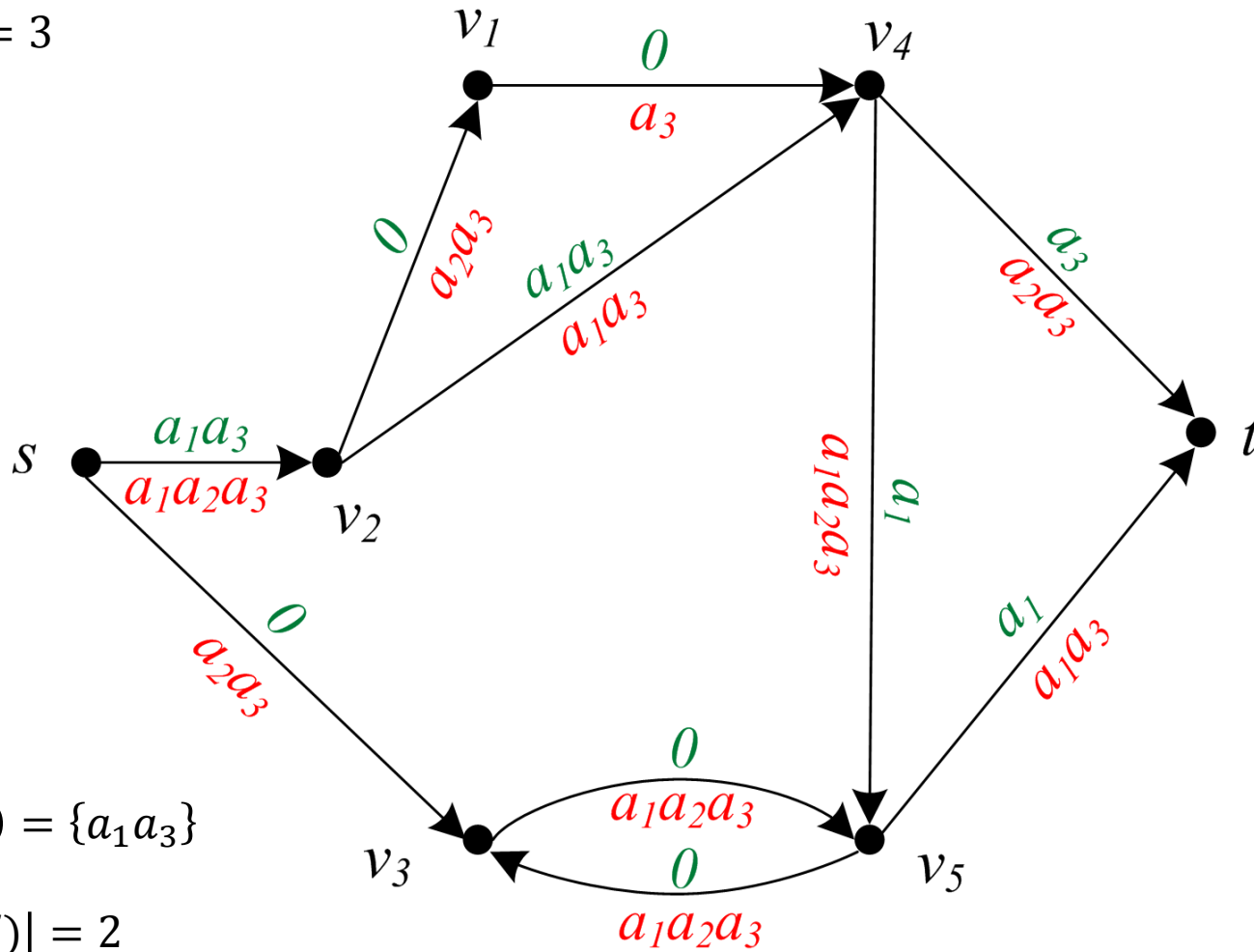
Пример работы алгоритма

$i = 2$

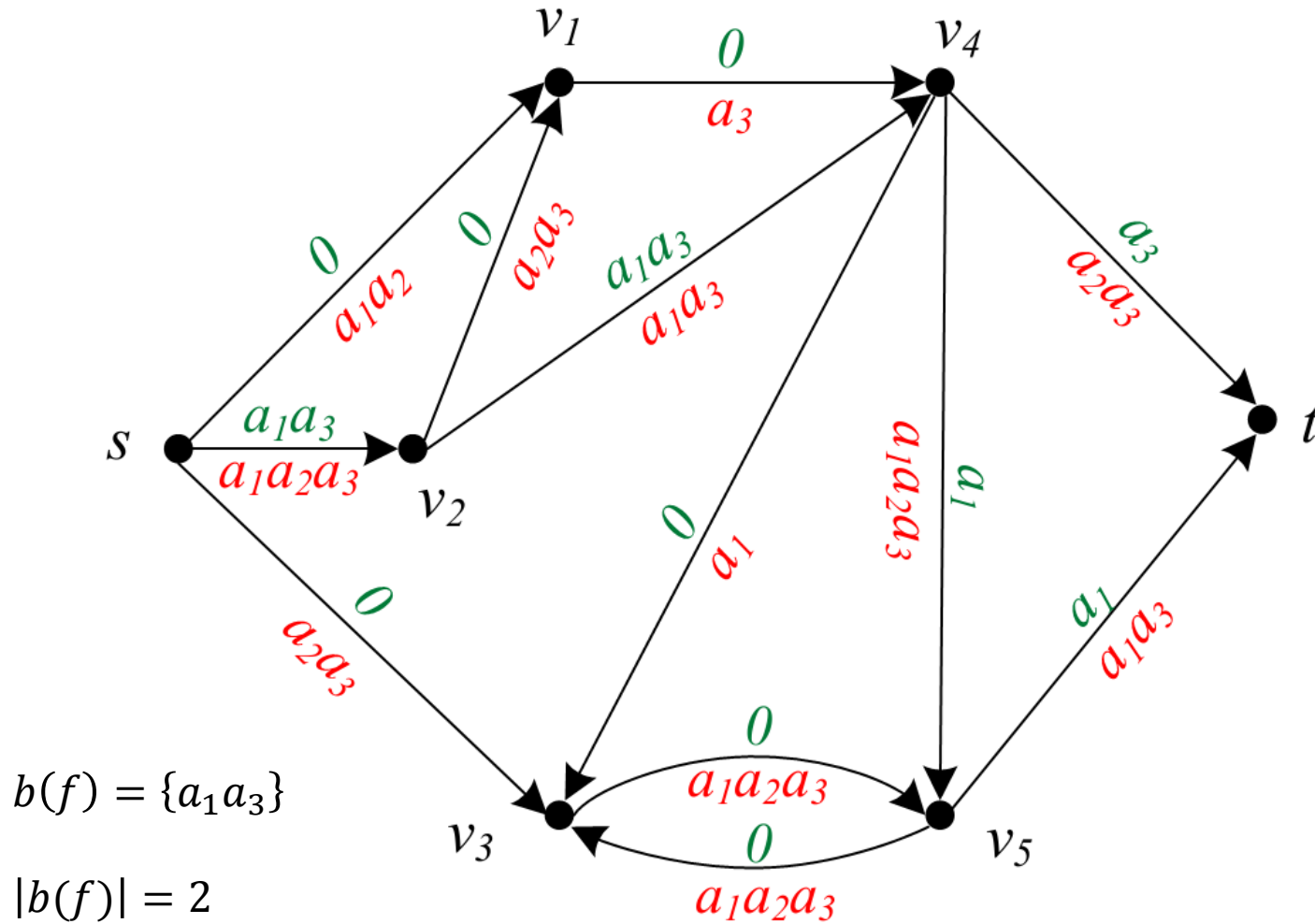


Пример работы алгоритма

$i = 3$



Пример работы алгоритма



Проталкивание предпотока

Пусть задана B -сеть $G(V, E)$ с источником s , стоком t , каждая дуга $e \in E$ имеет пропускную способность $c(e) \in B$. *Предпоток из s в t* в данной сети назовём функцию $f^*: E \rightarrow B$, удовлетворяющую условиям:

$$0 \leq f^*(e) \leq c(e) \text{ для всех } e \in E \quad (1)$$

$$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v) \geq \bigvee_{u \in V} f^*(v, u) \text{ для всех } v \in V \setminus \{s\} \quad (2)$$

Алгоритм проталкивания предпотока

Пусть s — корень и t — сток в некоторой сети $G = (V, E)$. Требуется найти максимальный поток f из s в t .

Этап 1: Проталкивание предпотока.

1. Положить $f^*(s) = \{1\}$, $f^*(v) = \{0\}$ для всех $v \neq s$, $A = \{s\}$, $A^* = \emptyset$.

$f^*(v)$ – совокупный предпоток, входящий в вершину v ,

A – список активных вершин, A^* – вспомогательный список.

2. «Протолкнуть» максимальный предпоток по всем дугам из каждой активной вершины $u \in A$:

$$f^*(u, v) = f^*(u) \wedge c(u, v)$$

$$f^*(v) = f^*(v) \vee f^*(u, v)$$

Если $f^*(v)$ для вершины v изменилось, v занести в A^* . По завершению шага, положить $A = A^*$, $A^* = \emptyset$.

Шаг 2 повторять до тех пор, пока $A \neq \emptyset$.

Алгоритм проталкивания предпотока

Этап 2: Приведение предпотока к максимальному потоку.

1. Положить $f(t) = f^*(t)$, $f(v) = \{0\}$ для всех $v \neq s$, $A = \{t\}$, $A^* = \emptyset$.

A – список активных вершин, A^* – вспомогательный список,

$f(v)$ – совокупный поток, входящий в вершину v .

2. Привести предпоток к потоку по всем дугам входящим в каждую активную вершину $u \in A$:

$$f(v, u) = f(u) \wedge f^*(v, u)$$

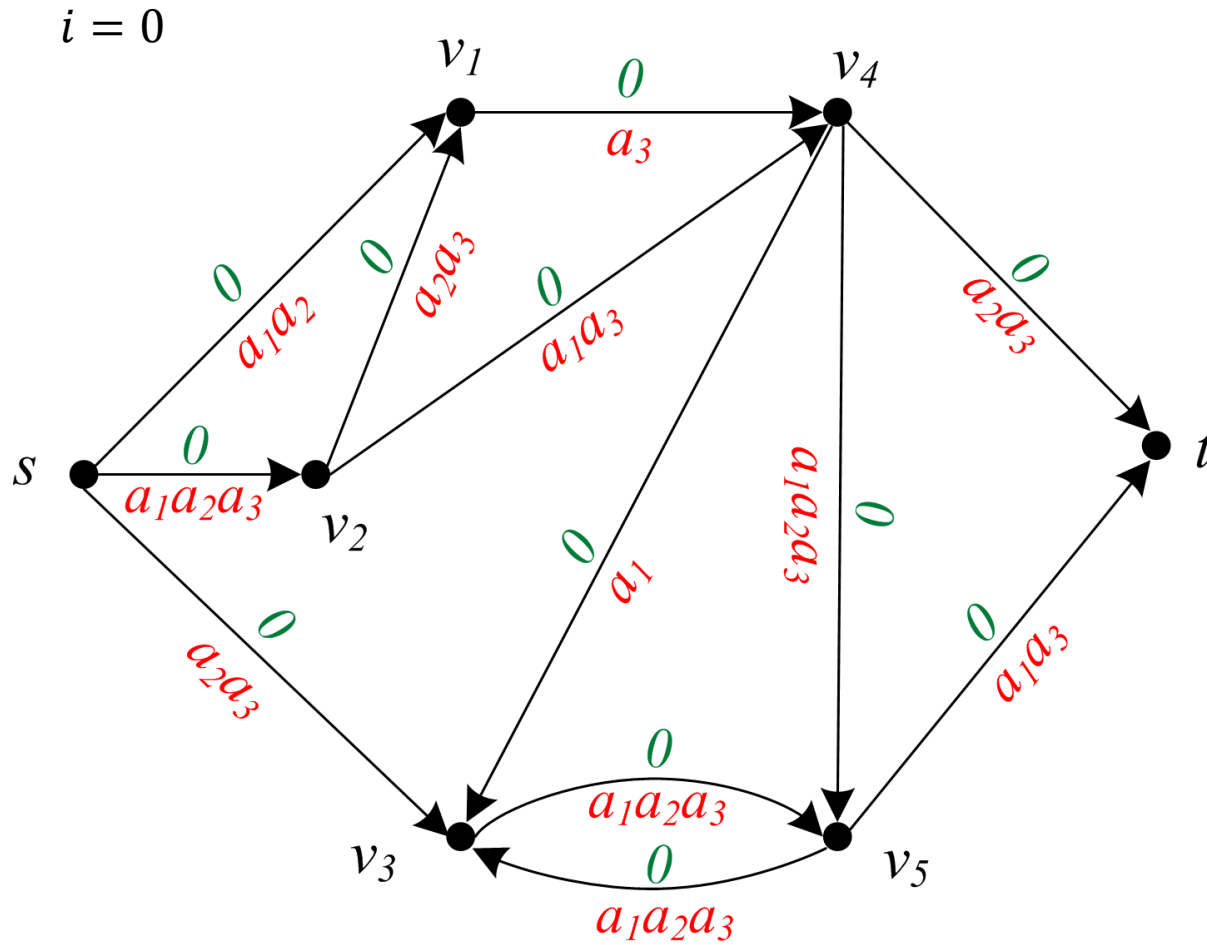
$$f(v) = f(v) \vee f(v, u)$$

Если $f(v)$ для вершины v изменилось, v занести в A^* . По завершению шага, положить $A = A^*$, $A^* = \emptyset$.

Шаг 2 повторять до тех пор, пока $A \neq \emptyset$.

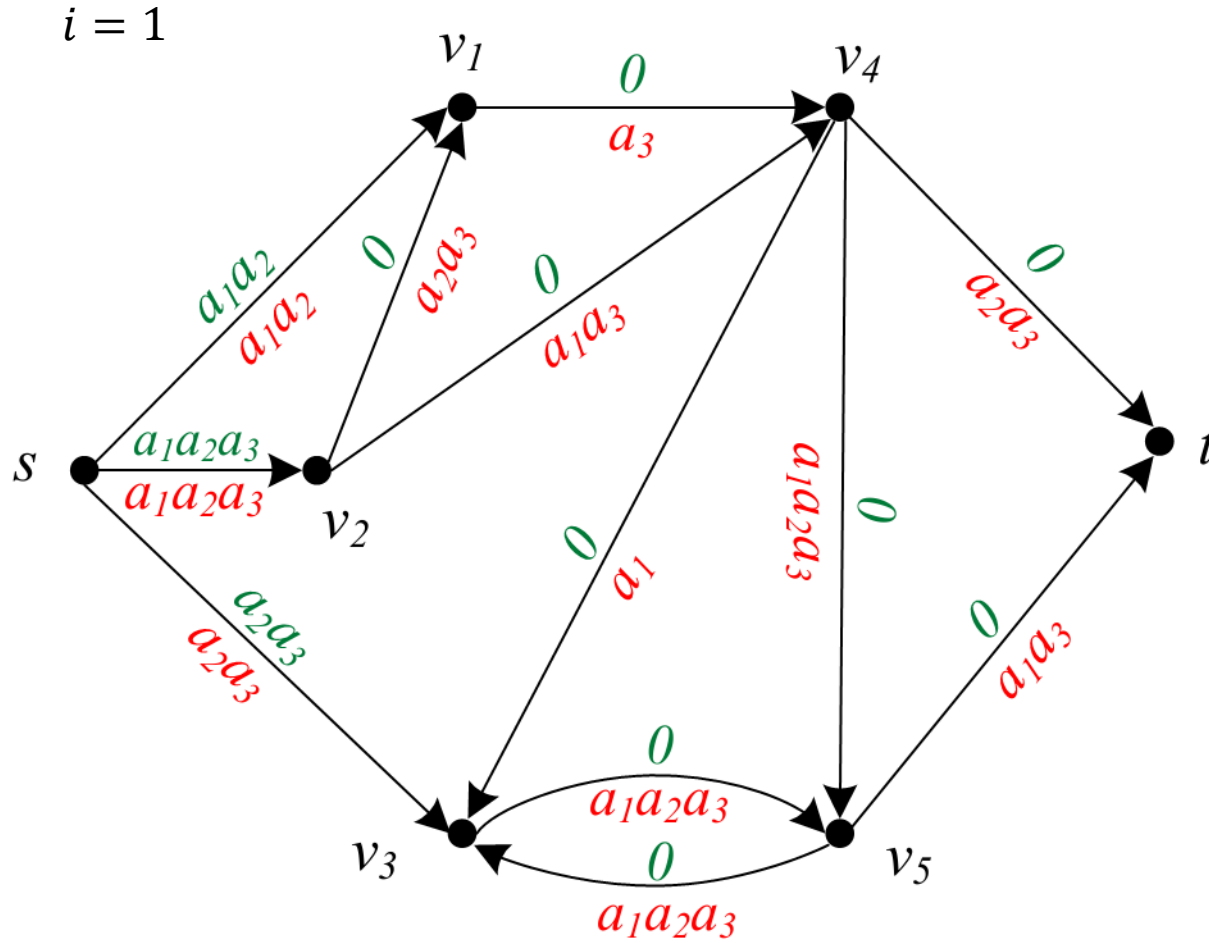
По завершении всех шагов алгоритма полученный поток f будет максимальным.

Пример работы алгоритма



v	$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v)$
s	1
v_1	0
v_2	0
v_3	0
v_4	0
v_5	0
t	0

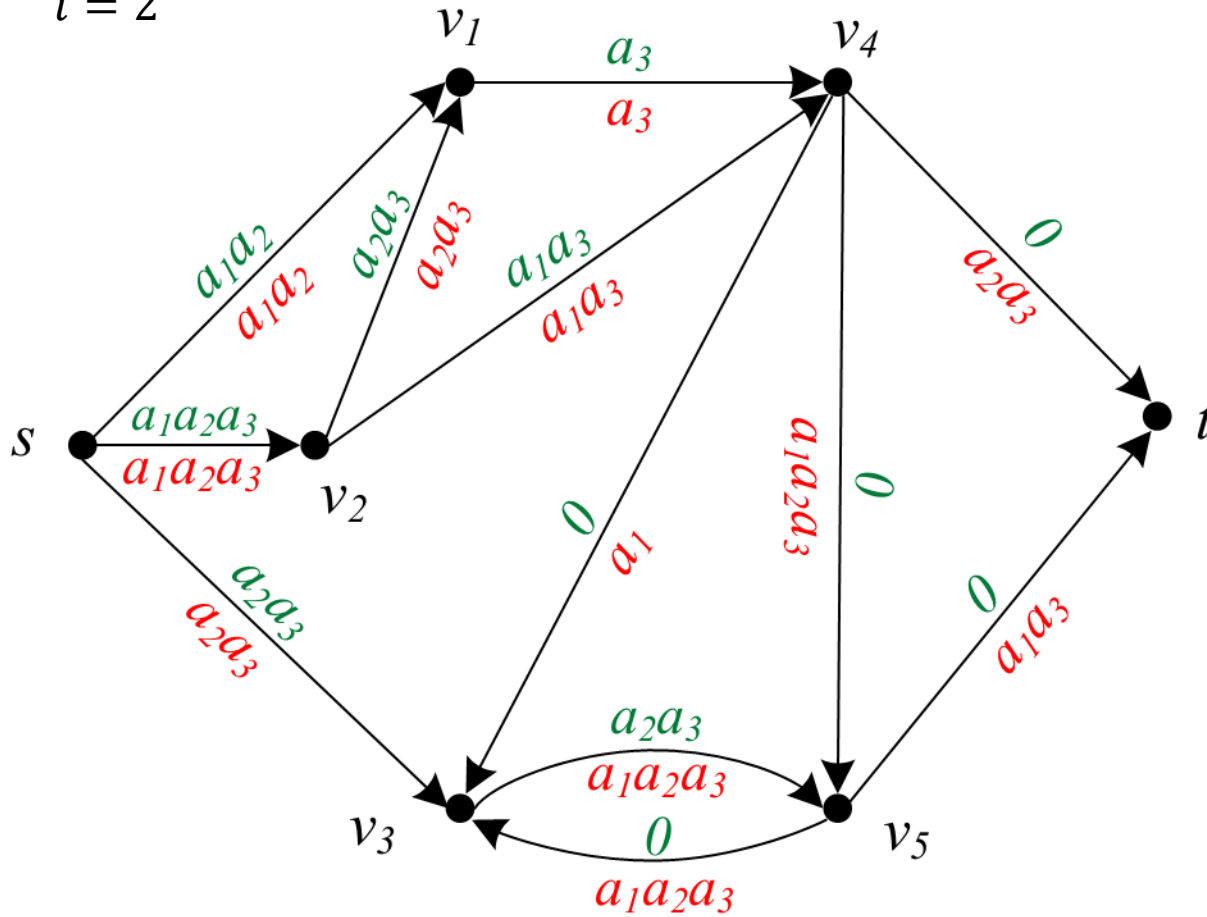
Пример работы алгоритма



v	$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v)$
s	1
v_1	$a_1 a_2$
v_2	1
v_3	$a_2 a_3$
v_4	0
v_5	0
t	0

Пример работы алгоритма

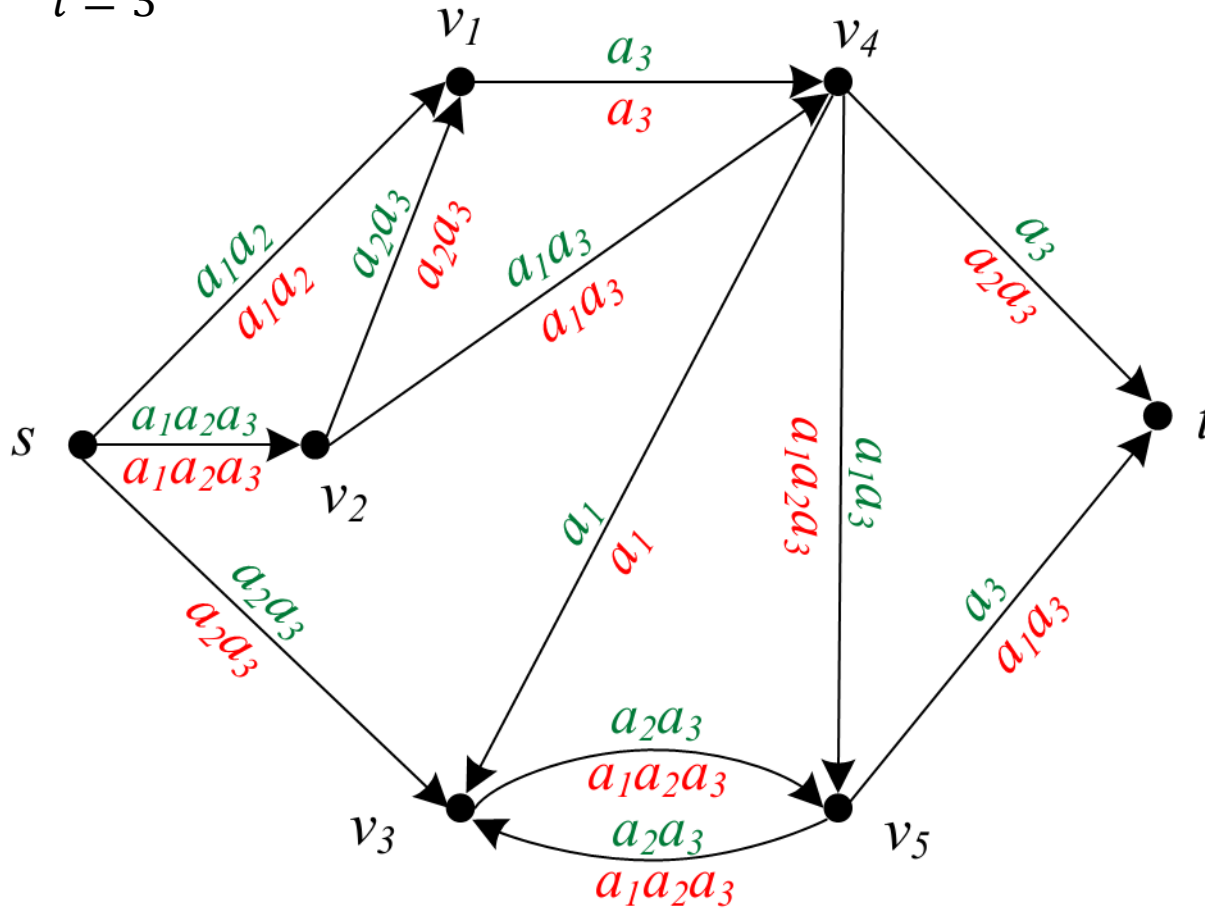
$i = 2$



v	$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v)$
s	1
v_1	1
v_2	1
v_3	a_2a_3
v_4	a_1a_3
v_5	a_2a_3
t	0

Пример работы алгоритма

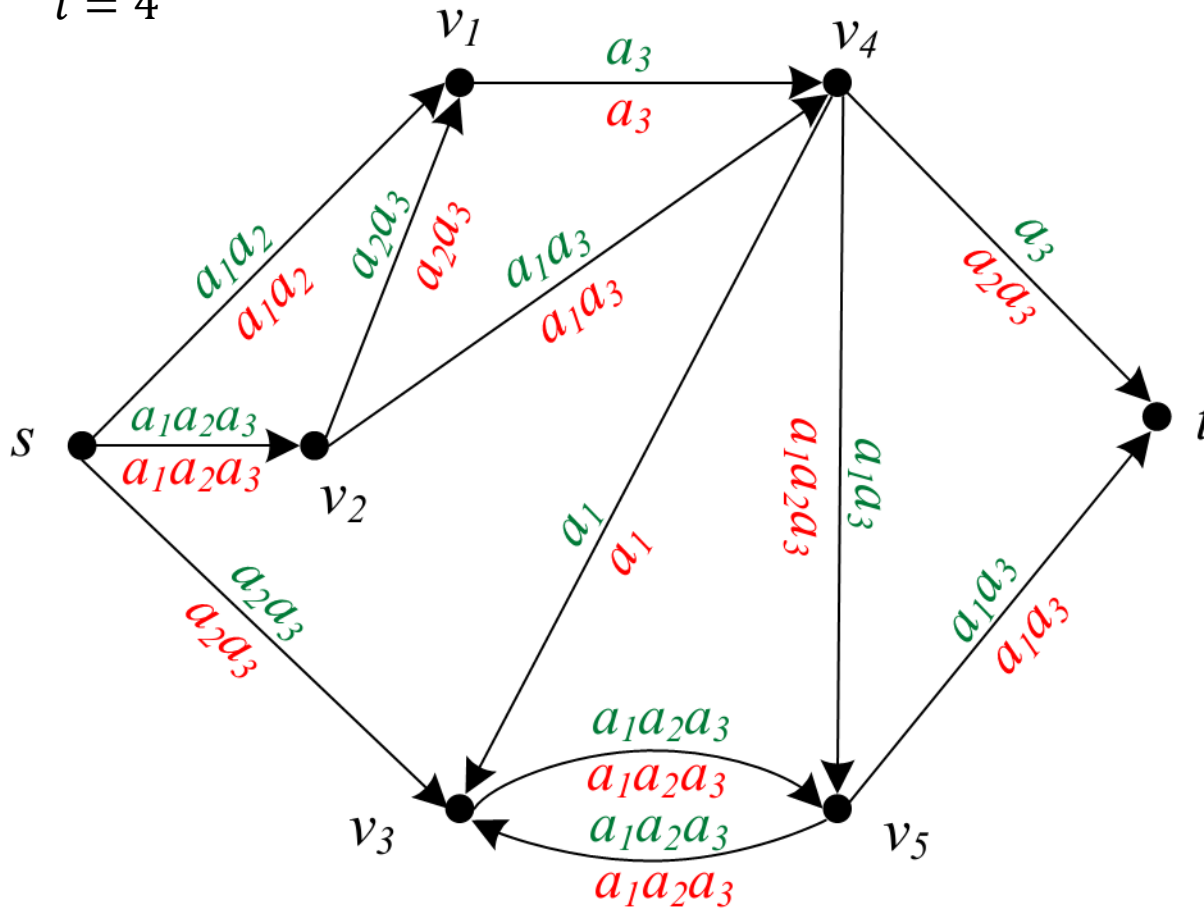
$i = 3$



v	$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v)$
s	1
v_1	1
v_2	1
v_3	1
v_4	a_1a_3
v_5	1
t	a_3

Пример работы алгоритма

$i = 4$

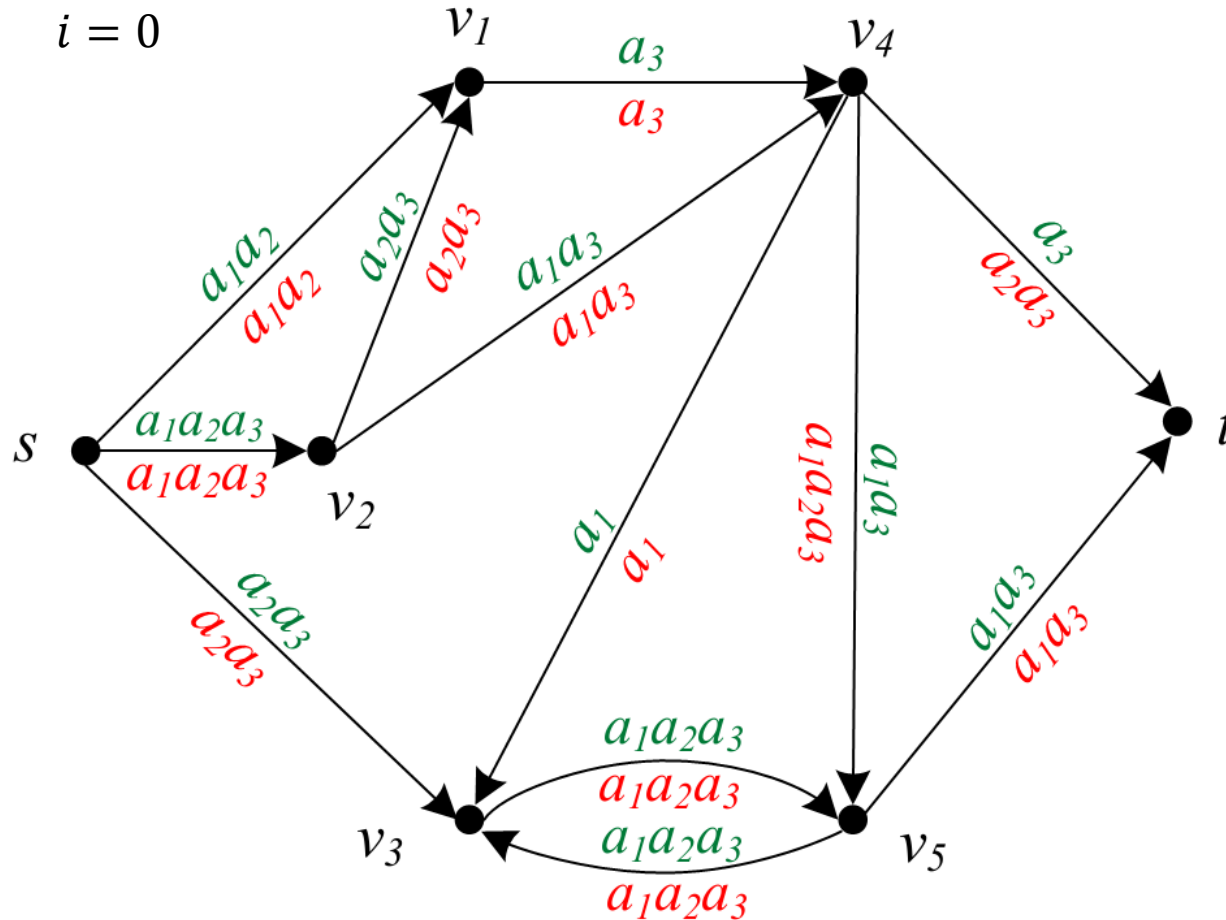


$$b(f) = \{a_1a_3\}$$

$$|b(f)| = 2$$

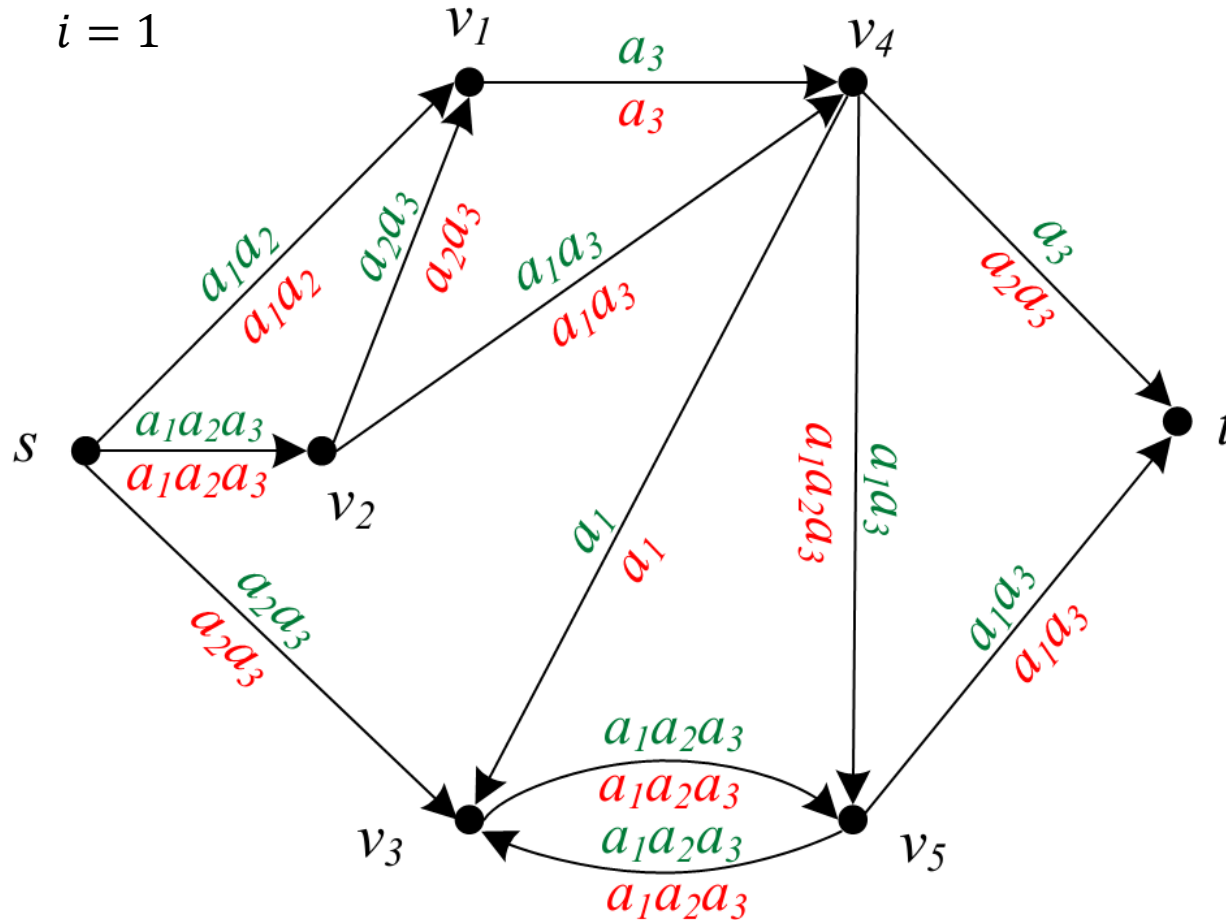
v	$\bigvee_{u \in V} f^*(u, v)$
s	1
v_1	1
v_2	1
v_3	1
v_4	a_1a_3
v_5	1
t	a_1a_3

Пример работы алгоритма



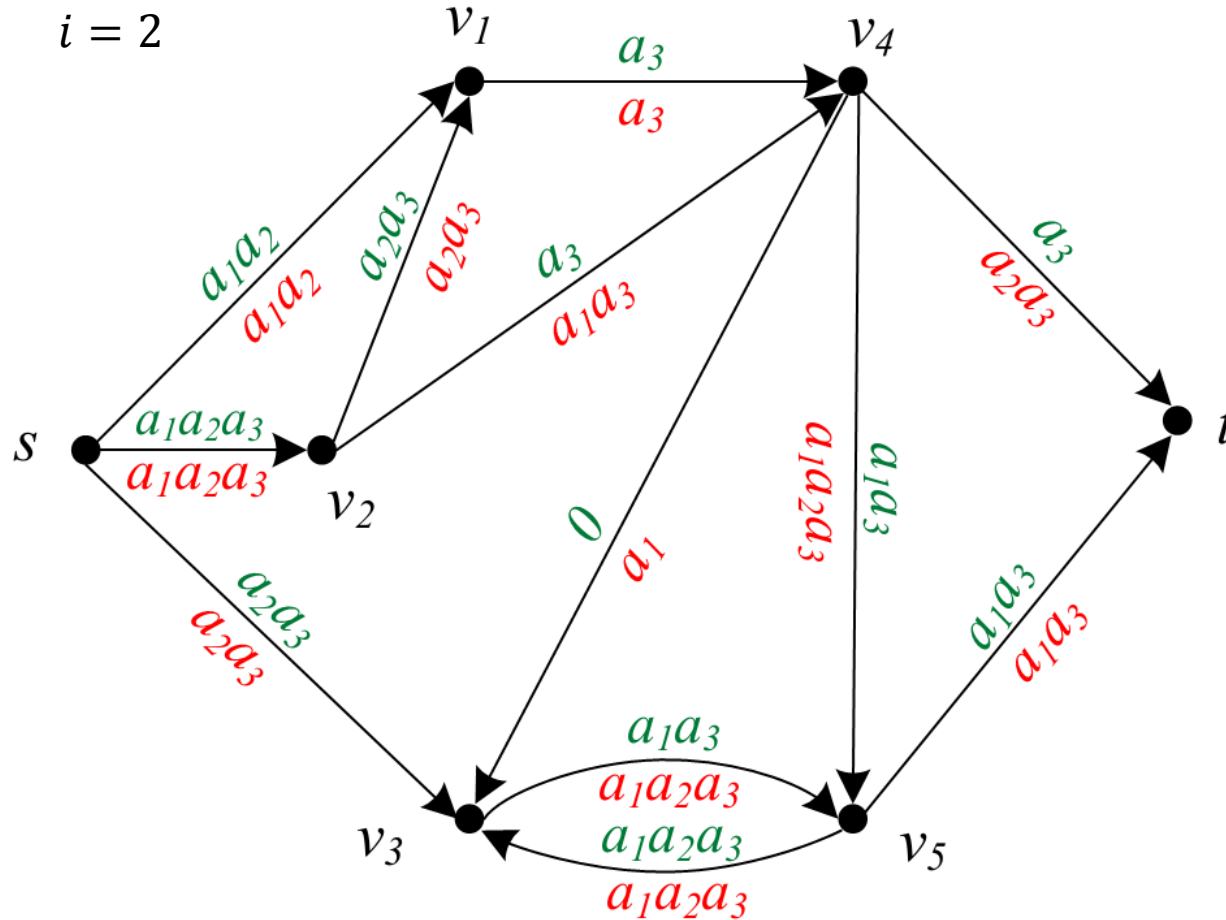
v	$\bigvee_{u \in V} f(u, v)$
s	0
v_1	0
v_2	0
v_3	0
v_4	0
v_5	0
t	a_1a_3

Пример работы алгоритма



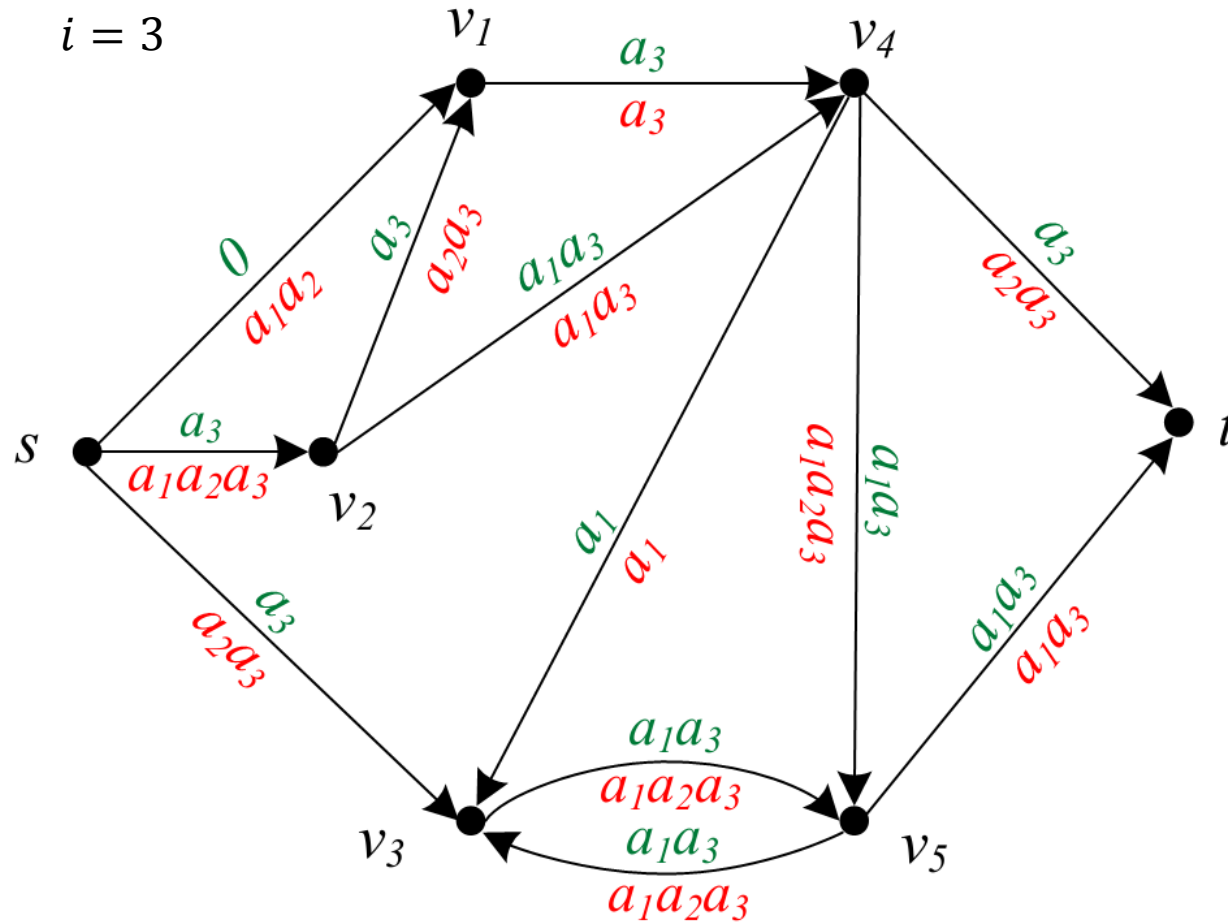
v	$\bigvee_{u \in V} f(u, v)$
s	0
v_1	0
v_2	0
v_3	0
v_4	a_3
v_5	a_1a_3
t	a_1a_3

Пример работы алгоритма



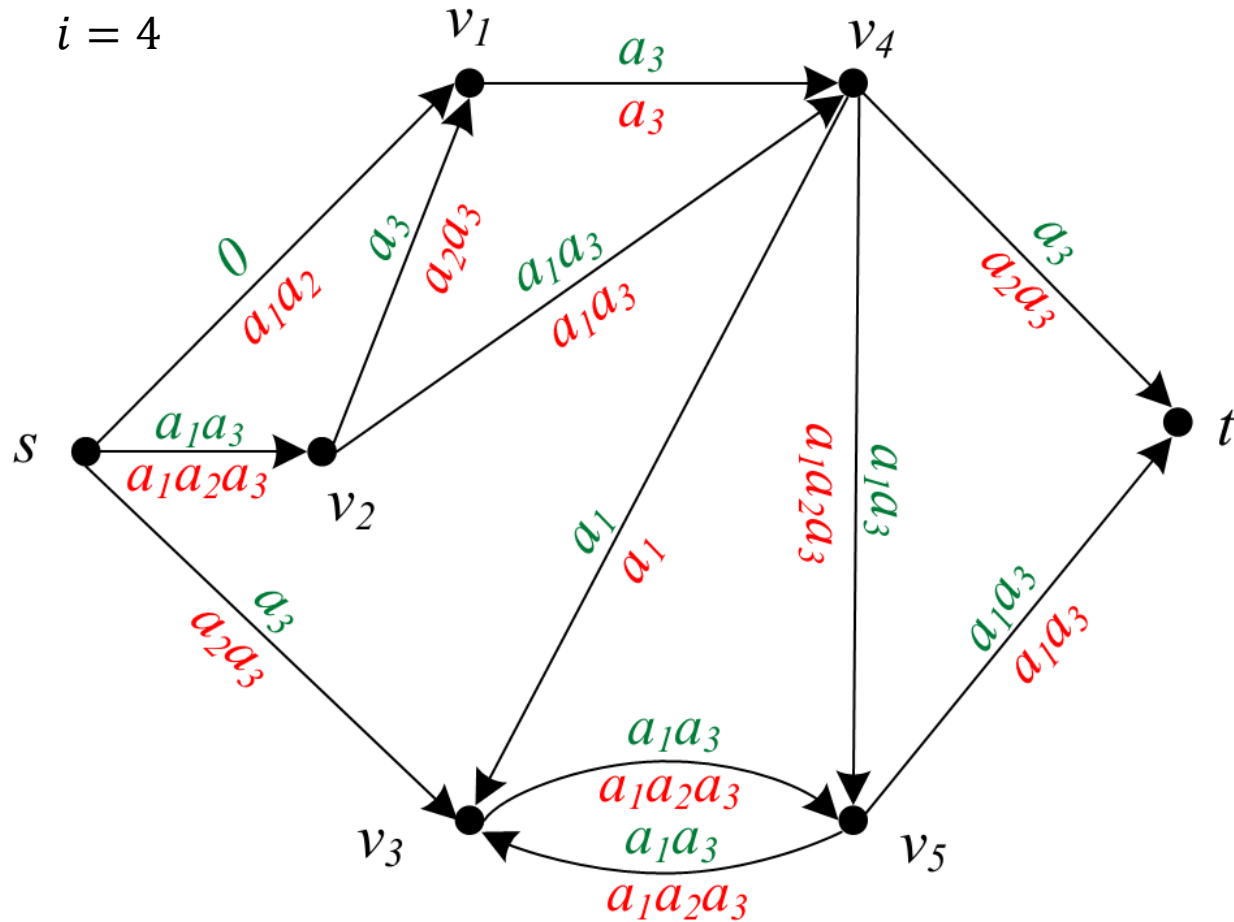
v	$\bigvee_{u \in V} f(u, v)$
s	0
v_1	a_3
v_2	a_3
v_3	$a_1 a_3$
v_4	$a_1 a_3$
v_5	$a_1 a_3$
t	$a_1 a_3$

Пример работы алгоритма



v	$\bigvee_{u \in V} f(u, v)$
s	0
v_1	a_3
v_2	$a_1 a_3$
v_3	$a_1 a_3$
v_4	$a_1 a_3$
v_5	$a_1 a_3$
t	$a_1 a_3$

Пример работы алгоритма



$$b(f) = \{a_1 a_3\}$$

$$|b(f)| = 2$$

v	$\bigvee_{u \in V} f(u, v)$
s	0
v_1	a_3
v_2	$a_1 a_3$
v_3	$a_1 a_3$
v_4	$a_1 a_3$
v_5	$a_1 a_3$
t	$a_1 a_3$

Основные результаты

- Рассмотрена актуальная содержательная задача в сфере сетевой безопасности
- Представлена соответствующая ей формальная задача о максимальном потоке в булевозначной сети
- Предложены эффективные алгоритмы для её решения

Благодарю за внимание!