Оптимизационные задачи для нильпотентных и разрешимых групп

30 апреля, 2015г.

Введение

Некоммутативная дискретная оптимизация — новое направление, связывающее классическую дискретную оптимизацию и теорию групп (алгебраических систем).

Введение

Некоммутативная дискретная оптимизация — новое направление, связывающее классическую дискретную оптимизацию и теорию групп (алгебраических систем).

Алгебраическая дискретная оптимизация

Введение

Некоммутативная дискретная оптимизация — новое направление, связывающее классическую дискретную оптимизацию и теорию групп (алгебраических систем).

Алгебраическая дискретная оптимизация

Основная идея:

Взять классическую алгоритмическую проблему:

- Задача о рюкзаке;
- Задача о сумме подмножества;
- Задача коммивояжера;
- и т.д.

и перевести её в алгоритмическую проблему на языке алгебраической системы.

Публикации

- Alexei Myasnikov, Andrey Nikolaev, Alexander Ushakov
  Knapsack Problems in Groups
- Alexei Myasnikov, Andrey Nikolaev, Alexander Ushakov
  The Post correspondence problem in groups
- Elizaveta Frenkel, Andrey Nikolaev, Alexander Ushakov
  Knapsack problems in products of groups

SSP

Классическая SSP (subset sum problem, 0-1 knapsack problem)

Даны $a_1, \ldots, a_k, a \in \mathbb{Z}$. Существуют ли $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ такие, что

$$\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_k a_k = a.$$

SSP

Классическая SSP (subset sum problem, 0-1 knapsack problem)

Даны $a_1, \ldots, a_k, a \in \mathbb{Z}$. Существуют ли $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ такие, что

$$\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_k a_k = a.$$

SSP в группе $G = \langle X | R \rangle$

Даны слова $g_1, \ldots, g_k, g$ алфавита $X \cup X^{-1}$. Существуют ли $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ такие, что

$$g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_k^{\varepsilon_k} = g$$

в группе G.

Алгоритмическая сложность классической $\mathbf{SSP}$

Классическая $\mathbf{SSP}$ псевдополиномиальна

- $\mathbf{SSP}(\mathbb{Z}) \in \mathbf{P}$, если $\mathbb{Z}$ порождена $\{1\}$;
- $\mathbf{SSP}(\mathbb{Z}) \in \mathbf{NP}$-complete, если $\mathbb{Z}$ порождена $\{2^n |\ n \in \mathbb{N}\}$.

Сложность $\mathbf{SSP}(G)$. Примеры.

Группа	**Сложность**	**Причина**
Группы с разрешимой проблемой равенства слов	Разрешима	Перебор вариантов
Нильпотентные	$\mathbf{P}$	Полиномиальный рост
Гиперболические	$\mathbf{P}$	Св-ва диаграммы Ван-Кампен
$BS(1,n)$	$\mathbf{NP}$-complete	Бинарная $\mathbf{SSP}(\mathbb{Z})$
$\mathbb{Z}^\omega$	$\mathbf{NP}$-complete	$\mathbf{ZOE}$
$\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$	$\mathbf{NP}$-complete	$\mathbb{Z}^\omega$, $\mathbf{ZOE}$
Свободные метабелевы	$\mathbf{NP}$-complete	$\mathbb{Z}^\omega$
Группа Томпсона F	$\mathbf{NP}$-complete	$\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$
Группа фонарщика	$\mathbf{NP}$-complete	$\downarrow$

Группа фонарщика

$A \wr B = \oplus_B A \rtimes B$. Прямая сумма $\oplus_B A$ – называется базой сплетения $A \wr B$.

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – циклическая группа порядка 2.

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, где $1 + 1 = 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1$.

Группа фонарщика

$A \wr B = \oplus_B A \rtimes B$. Прямая сумма $\oplus_B A$ – называется базой сплетения $A \wr B$.

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – циклическая группа порядка 2.

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, где $1 + 1 = 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1$.

Группа фонарщика:

$$L = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} = \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z},$$

$$(f, a)(h, b) = (fh^a, ab),\ \ f, h \in \oplus_{\mathbb{Z}},\ \ a, b \in \mathbb{Z}$$

группа L — метабелева, то есть $\forall\ x, y, z, t\ \ [[x, y][z, t]] = 1$

Группа фонарщика

$A \wr B = \oplus_B A \rtimes B$. Прямая сумма $\oplus_B A$ – называется базой сплетения $A \wr B$.

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – циклическая группа порядка 2.

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, где $1 + 1 = 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1$.

Группа фонарщика:

$$L = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} = \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z},$$

$$(f, a)(h, b) = (fh^a, ab),\ \ f, h \in \oplus_{\mathbb{Z}},\ \ a, b \in \mathbb{Z}$$

группа L — метабелева, то есть $\forall\ x, y, z, t\ [[x, y][z, t]] = 1$

$$L = \langle a, t \mid a^2 = 1, [t^{-n} a t^n, t^{-m} a t^m] = 1,\ \ m, n \in \mathbb{Z}] \rangle$$

Причем здесь фонарщик?

Пусть

$$(f,a) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & * & & & \\ & & & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$(h,b) = \begin{pmatrix} \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & & * & & \\ & & & & & 2 & & \end{pmatrix}$$

Пусть

$$(f,a)=\begin{pmatrix}\dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ & & & & * & & & \\ & & & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$(h,b)=\begin{pmatrix}\dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ & & & & & * & & \\ & & & & & 2 & & \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(fh^a,a+b)=\begin{pmatrix}\dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots\\ & & & & & & * & \\ & & & & & & 3 & \end{pmatrix}$$

Theorem

Задача о сумме подмножеств для группы
$L = \langle a, t \mid a^2 = 1, [t^{-n} a t^n, t^{-m} a t^m] = 1,\ m, n \in \mathbb{Z}] \rangle$ *NP-полна.*

Theorem

Задача о сумме подмножеств для группы $L = \langle a, t \mid a^2 = 1, [t^{-n}at^n, t^{-m}at^m] = 1,\ m, n \in \mathbb{Z}] \rangle$ *NP-полна.*

Теорема доказана с помощью полиномиального сведения задачи о точном покрытии множества (Exact set cover, ESC) к проблеме о сумме подмножеств SSP для группы L.

Задача о точном покрытии множества

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество. Пусть S — набор подмножеств множества X.
$S^* \subseteq S$ называется точным покрытием множества X, если выполнены два условия:

1. объединение множеств из S^* равно множеству X;
2. множества из S^* попарно не пересекаются.

Задача о точном покрытии множества

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество. Пусть S — набор подмножеств множества X.
$S^* \subseteq S$ называется точным покрытием множества X, если выполнены два условия:

1. объединение множеств из S^* равно множеству X;
2. множества из S^* попарно не пересекаются.

Проблема нахождения точного покрытия множества принадлежит списку Р. Карпа из 21-ой NP-полной задачи.

Шаг 0. Вход задачи ESC

По произвольному входу X и S для задачи ESC построим такой вход для задачи SSP, что решение SSP в группе L для построенного входа будет эквивалентно нахождению решения задачи ESC.

Шаг 0. Вход задачи ESC

По произвольному входу X и S для задачи ESC построим такой вход для задачи SSP, что решение SSP в группе L для построенного входа будет эквивалентно нахождению решения задачи ESC.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
$S = \{A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{2, 3\},\ A_3 = \{1, 2, 3\},\ A_4 = \{4\}\}$.

Шаг 0. Вход задачи ESC

По произвольному входу X и S для задачи ESC построим такой вход для задачи SSP, что решение SSP в группе L для построенного входа будет эквивалентно нахождению решения задачи ESC.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
$S = \{A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{2, 3\},\ A_3 = \{1, 2, 3\},\ A_4 = \{4\}\}$.

Матрица принадлежности:

$$B_S = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Шаг 1. Подготовительный

Сделаем элементы множеств $A_1, \ldots, A_4$ уникальными:

$$A_1 = \{1_1, 2_1\},\ A_2 = \{2_2, 3_2\},\ A_3 = \{1_3, 2_3, 3_3\},\ A_4 = \{4_4\}$$

$$X' = \{1_1, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 3_3, 4_4\}$$

Расширенная матрица принадлежности:

$$BE_S = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1_1 & 1_3 & 2_1 & 2_2 & 2_3 & 3_2 & 3_3 & 4_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шаг 2. Подготовительный

Большая расширенная матрица принадлежности:

$$BBE_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} 1_1 & 1_3 & & 2_1 & 2_2 & 2_3 & & 3_2 & 3_3 & & 4_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 \\ 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

где $\overline{0}$ — нулевой вектор длины $|X'| \cdot |X| = 32$.

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lllcccccccccccl}
 & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & ,\mathbf{0})
\end{array}
$$

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lcl ccccccccccc l}
 & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& 1 & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& 0 & 1 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4})
\end{array}
$$

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lllcccccccccccl}
 & & & & 1 & 2 & \ldots & 35 & 36 & 37 & \ldots & 70 & 71 & \ldots & 104 \\
h_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & , \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4})
\end{array}
$$

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccr}
 & & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4})
\end{array}
$$

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_8 & = & (& (\leftarrow 12) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{4})
\end{array}
$$

Шаг 3. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{cccc|ccccccccccc|l}
 & & & & 1 & 2 & \ldots & 35 & 36 & 37 & \ldots & 70 & 71 & \ldots & 104 & \\
h_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & 1 & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & 1 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 1 & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 1 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & 1 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 1 & 0 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & 1 & \overline{0} & & ,\ \mathbf{4}) \\
g_8 & = & (& (\leftarrow 12) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & 1 & ,\ \mathbf{4}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\ \mathbf{16})
\end{array}
$$

Обобщение.

Theorem

Пусть A — произвольная неединичная группа, $\mathbb{Z} < B$ и в группах A и B разрешима проблема равенства слов. Тогда проблема о сумме подмножеств NP-полна на группе $L = A \wr B$.

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$\begin{array}{lllccccccccccccl}
 & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & ,\mathbf{0})
\end{array}$$

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lllccccccccccccl}
 & & & 1 & 2 & \ldots & 35 & 36 & 37 & \ldots & 70 & 71 & \ldots & 104 & & \\
h_1 & = & (& a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & , & \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& b & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& 0 & b & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{llllcccccccccccr}
 & & & & 1 & 2 & \ldots & 35 & 36 & 37 & \ldots & 70 & 71 & \ldots & 104 & \\
h_1 & = & (& & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & ,\mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & b & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & b & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & b & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & b & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & b & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lllcccccccccccr}
 & & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 \\
h_1 & = & (& & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & ,\mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & b & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & b & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & b & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & b & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & b & \overline{0} & & & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & b & 0 & \overline{0} & & ,\mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & b & \overline{0} & & ,\mathbf{4})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{llllccccccccccccl}
 & & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & \\
h_1 & = & (& & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & , \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & b & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & b & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & b & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & b & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & b & \overline{0} & & & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & b & 0 & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & b & \overline{0} & & , \mathbf{4}) \\
g_8 & = & (& (\leftarrow 12) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & b & , \mathbf{4})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = A \wr Z$. Пусть $a, b \in A$, $a = b^{-1}$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccl}
 & & & & 1 & 2 & \dots & 35 & 36 & 37 & \dots & 70 & 71 & \dots & 104 & & \\
h_1 & = & (& & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & a & 0 & \overline{0} & a & 0 & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& & 0 & a & \overline{0} & 0 & 0 & a & \overline{0} & 0 & a & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & a & , & \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & b & 0 & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_2 & = & (& & 0 & b & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_3 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & b & 0 & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_4 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & b & 0 & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_5 & = & (& (\leftarrow 4) & & & \overline{0} & 0 & 0 & b & \overline{0} & & & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_6 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & b & 0 & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_7 & = & (& (\leftarrow 8) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & 0 & b & \overline{0} & & , & \mathbf{4}) \\
g_8 & = & (& (\leftarrow 12) & & & \overline{0} & & & & \overline{0} & & & \overline{0} & b & , & \mathbf{4}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
g & = & (& & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & 0 & \overline{0} & 0 & , & \mathbf{16})
\end{array}
$$

Другие классы групп

Theorem

Пусть A — произвольная неединичная группа, $\mathbb{Z} < B$ и в группах A и B разрешима проблема равенства слов. Тогда проблема о сумме подмножеств NP-полна на группе $\oplus_\omega A \times B$.

Обобщение. $L = \bigoplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lcl}
h_1 & = & (\; a \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (\; 0 \;\; a \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (\; a \;\; a \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; , \mathbf{0})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = \oplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lcllllllllllllll}
h_1 & = & (& a & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& a & a & a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & ,\mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & & & & b & 0 & & & & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_2 & = & (& & & & & 0 & b & & & & & & & ,\mathbf{1})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = \oplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{llcccccccccccccl}
h_1 & = & (& a & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& a & a & a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & , \mathbf{0}) \\
\\
g_1 & = & (& & & & & b & 0 & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_2 & = & (& & & & & 0 & b & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_3 & = & (& & & & & & & b & 0 & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_4 & = & (& & & & & & & 0 & b & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_5 & = & (& & & & & & & 0 & 0 & b & & & & , \mathbf{1})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = \bigoplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lcl cccccccccccc l}
h_1 & = & (& a & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& a & a & a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & , \mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & & & & b & 0 & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_2 & = & (& & & & & 0 & b & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_3 & = & (& & & & & & & b & 0 & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_4 & = & (& & & & & & & 0 & b & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_5 & = & (& & & & & & & 0 & 0 & b & & & & , \mathbf{1}) \\
g_6 & = & (& & & & & & & & & & b & 0 & & , \mathbf{1}) \\
g_7 & = & (& & & & & & & & & & 0 & b & & , \mathbf{1})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = \bigoplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccl}
h_1 & = & (& a & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& a & a & a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & , \mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & , \mathbf{0}) \\
\\
g_1 & = & (& & & & & b & 0 & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_2 & = & (& & & & & 0 & b & & & & & & & , \mathbf{1}) \\
g_3 & = & (& & & & & & & b & 0 & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_4 & = & (& & & & & & & 0 & b & 0 & & & & , \mathbf{1}) \\
g_5 & = & (& & & & & & & 0 & 0 & b & & & & , \mathbf{1}) \\
g_6 & = & (& & & & & & & & & & b & 0 & & , \mathbf{1}) \\
g_7 & = & (& & & & & & & & & & 0 & b & & , \mathbf{1}) \\
g_8 & = & (& & & & & & & & & & & & b & , \mathbf{1})
\end{array}
$$

Обобщение. $L = \oplus_\omega A \times B$. Пусть $a, b \in A, a = b : -1$. Вход задачи SSP:

$$
\begin{array}{ccclllllllllllll}
h_1 & = & (& a & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_2 & = & (& 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_3 & = & (& a & a & a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & ,\mathbf{0}) \\
h_4 & = & (& 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & ,\mathbf{0}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g_1 & = & (& & & & & b & 0 & & & & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_2 & = & (& & & & & 0 & b & & & & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_3 & = & (& & & & & & & b & 0 & 0 & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_4 & = & (& & & & & & & 0 & b & 0 & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_5 & = & (& & & & & & & 0 & 0 & b & & & & ,\mathbf{1}) \\
g_6 & = & (& & & & & & & & & & b & 0 & & ,\mathbf{1}) \\
g_7 & = & (& & & & & & & & & & 0 & b & & ,\mathbf{1}) \\
g_8 & = & (& & & & & & & & & & & & b & ,\mathbf{1}) \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
g & = & (& a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ,\mathbf{4})
\end{array}
$$

Задача о рюкзаке (knapsack problem) $\mathbf{KP}$.

$\mathbf{KP}$ для целых чисел.

Даны $a_1, \ldots, a_k, a \in \mathbb{Z}$. Существуют ли $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k = a.$$

Задача о рюкзаке (knapsack problem) $\mathbf{KP}$.

$\mathbf{KP}$ для целых чисел.

Даны $a_1, \ldots, a_k, a \in \mathbb{Z}$. Существуют ли $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k = a.$$

$\mathbf{KP}$ в группе G

Пусть группа G порождена множеством X. Даны слова $g_1, \ldots, g_k, g \in (X \cup X^{-1})^*$. Существуют ли $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что

$$g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_k^{\varepsilon_k} = g$$

в группе G.

Известные результаты

$\mathbf{KP}$:

- $\mathbf{P}$-time: в абелевых группах, гиперболических группах (А. Мясников, А. Николаев, А. Ушаков).
- Неразрешима в нильпотентных группах (M. Lohrey; А. Мищенко, А. Трейер).

Связанные результаты и работы

- SSP полиномиальна для нильпотентных групп (А.Мясников, А.Николаев, А.Ушаков).
- M.Lohrey показал, что существуют $d, l \geq 3$ и последовательность $C_1, \ldots, C_l$ циклических подгрупп унитреугольной группы $UT(d, Z)$ такие, что проблема вхожения в множество $C_1 C_2 \ldots C_l$ неразрешима.
- Moon Duchin, Hao Liang, Michael Shapiro "Equations in nilpotent groups"

Результат

Теорема (А.Мищенко, А.Трейер)

Для любого $c \geq 2$ существует группа $G = \langle X | R \rangle$ ступени нильпотентности c и слова $g, g_1, \dots, g_k \in (X \cup X^{-1})^*$ такие, что КР неразрешима для входа $g, g_1, \dots, g_k$ в группе G.

Результат

Теорема (А.Мищенко, А.Трейер)

Для любого $c \geq 2$ существует группа $G = \langle X | R \rangle$ ступени нильпотентности c и слова $g, g_1, \ldots, g_k \in (X \cup X^{-1})^*$ такие, что КР неразрешима для входа $g, g_1, \ldots, g_k$ в группе G.

Схема доказательства:

- Пусть S произвольная конечная система квадратных диофантовых уравнений.
- По системе S мы подбираем группу G и слова $g, g_1, \ldots, g_k$, такие, что нахождение решения S эквивалентно решению КР для этих слов в группе G, но, возможно, с дополнительными ограничениями вида $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.
- Борьба с ограничениями. Подправляем вход задачи, чтобы избавиться от ограничений.
- Так как любое диофантово уравнение сводится к системе квадратных диофантовых уравнений, то используя знаменитый результат Ю.В.Матиясевича о неразрешимости задачи нахождения целочисленных корней произвольного диофантова уравнения, мы доказываем наше утверждение.

KP for 2 step nilpotent groups. Positive.

В случае, $G = N_{2,r}$ KP сводится к системе диофантовых уравнений:
r линейных уравнений,
$\frac{r(r-1)}{2}$ квадратных уравнений.

KP for 2 step nilpotent groups. Positive.

В случае, $G = N_{2,r}$ KP сводится к системе диофантовых уравнений:
r линейных уравнений,
$\frac{r(r-1)}{2}$ квадратных уравнений.
Таким образом, для группы Гейзенберга, KP разрешима для произвольного входа.

Пусть $\mathcal{S}$ – система квадратных диофантовых уравнений.
Группа G ступени нильпотентности ≥ 2:
Let $S_1 \in \mathcal{S}$, and:

$$S_1 = (\alpha_1 + \sum_{i=1}^{s} \beta_{1i}\varepsilon_i + \sum_{i,j=1}^{s} \gamma_{1ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0).$$

Мы можем так подобрать вход для задачи KP, что приведя произведение $g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k}$ к нормальной форме, мы получим л.ч. уравнения S_1 как степень при некотором базисном коммутаторе.

Линейная часть уравнения S_1

Пусть c_1 - базисный коммутатор и $c_1 = [a_1, a_2]$.
Положим $g_1 = c_1^{\beta_1 1}, \dots, g_s = c_1^{\beta_1 s}$.
Then $g_1^{\varepsilon_1} \dots g_s^{\varepsilon_s} = c_1^{\sum_{i=1}^{s} \beta_1 i \varepsilon_i}$.

Квадратичная часть

Для слагаемого вида $\gamma_{1ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$ включаем во вход задачи четыре элемента:

- $q_{ij1} = a_1^{-\gamma_{1ij}}$
- $q_{ij2} = a_2^{-1}$
- $q_{ij3} = a_1^{\gamma_{1ij}}$
- $q_{ij4} = a_2$

Тогда выражение

$$q_{ij1}^{\varepsilon_i^{'}} q_{ij2}^{\varepsilon_j^{'}} q_{ij3}^{\varepsilon_i^{''}} q_{ij4}^{\varepsilon_i^{''}}$$

В предположении, что
$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{'} = \varepsilon_i^{''}$ and $\varepsilon_j = \varepsilon_j^{'} = \varepsilon_j^{''}$
Равно

$$= c_1^{\gamma_{1ij}\varepsilon_i\varepsilon_j}$$

Все ограничения поместим в множество E.

Определив $g = c_1^{-\alpha}$, получаем, что эксп. уравнение в группе:

$$g_1^{\varepsilon_1} \dots g_s^{\varepsilon_s} \prod_{ij}^{s} q_{ij1}^{\varepsilon_i^{'}} q_{ij2}^{\varepsilon_j^{'}} q_{ij3}^{\varepsilon_i^{''}} q_{ij4}^{\varepsilon_i^{''}} = g$$

эквивалентно S_1 с учетом ограничений из E.

Removing constraints

Пусть $\varepsilon_i = \varepsilon_j \in E$.
Выбираем базисный коммутатор c, который не был использован ранее.
Определим $g'_i = g_i c,\ g'_j = g_j c^{-1}$.
Т.к. степень при c в элементе g равна нулю по построению, то $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Что дальше?

1. Пусть $L_1 = A \rtimes B$ и $L_2 = A \times B$, может ли быть, что SSP для групп L_1 и L_2 принадлежит разным классам сложности?
2. Для метабелевых (без абелевых и нильпотентных) групп SSP NP-полна?
3. Проблема о рюкзаке для групп Баумслага-Солитера вида $BS(1, n)$ разрешима? Если разрешима то полиномиальна?